

Б. Х. Имомназаров¹✉, Х. Х. Имомназаров¹, И. К. Искандаров²

Бегущие поперечные волны в пористой среде

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

²Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация
e-mail: imom@omzg.sccc.ru

Аннотация. Получена одномерная система дифференциальных уравнений, описывающая распространение сейсмических волн в насыщенной жидкости пористых сред. Данная система является гиперболической которая описывает распространение поперечной волны в пористой среде в диссипативном приближении. Проблема существования бегущих волн в неоднородной пористой среде важна для объяснения распространения волн на большие расстояния. Рассмотрены новые решения волновых уравнений с переменными коэффициентами, описывающих бегущие SH волны в пористой среде с учетом диссипации энергии. Получена формула, связывающая амплитуду волны и акустической жесткости для пористой среды. Данная формула совпадает со знаменитым законом Грина (для жидких сред в случае постоянства плотности), известным из закона сохранения потока энергии в средах с медленно меняющимися параметрами. Такие решения получены с использованием методов преобразования, когда уравнения с переменными коэффициентами могут быть сведены к уравнению с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: волновое уравнение, неоднородная среда, бегущие волны, пористость, проницаемость, диссипация энергии

Bh. Kh. Imomnazarov¹✉, Kh. Kh. Imomnazarov¹, I. K. Iskandarov²

Traveling shear waves in a porous medium

¹Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, the Russian Federation

²Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation
e-mail: imom@omzg.sccc.ru

Abstract. A one-dimensional system of differential equations describing the propagation of seismic waves in saturated porous media is obtained. This system is hyperbolic and describes the propagation of shear waves in a porous medium in the dissipative approximation. The problem of the existence of traveling waves in inhomogeneous porous media is important for explaining wave propagation over long distances. New solutions to wave equations with variable coefficients describing traveling SH waves in a porous medium are considered, taking energy dissipation into account. A formula was obtained linking wave amplitude and acoustic impedance for a porous medium. This formula coincides with the famous Green's law (for liquid media with constant density), which is known from the law of conservation of energy flux in media with slowly changing parameters. These solutions are obtained using transformation methods, where equations with variable coefficients can be reduced to an equation with constant coefficients.

Keywords: wave equation, inhomogeneous medium, traveling waves, porosity, permeability, energy dissipation

Введение

Нестационарные процессы описываются уравнениями теории фильтрации в трещиновато-пористых средах. Как отмечено в [1, 2] и других работах, в силу достаточно высокой проницаемости межблочного пространства приближения Дарси для описания нестационарных процессов могут в принципе оказаться неправомерными. Закон сохранения массы и уравнения движения жидкости в случае, когда скорость движения упругого пористого тела $\mathbf{u} = 0$ и тензор напряжений $h_{ik} = 0$, описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l v) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \chi \rho_l v = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) $v = v(t, x)$ – скорость фильтрации жидкости в упругой пористой среде с парциальной плотностью $\rho_l = \rho_l(t, x)$, $\rho = \rho_l(t, x) + \rho_s(t, x)$, $\rho_s(t, x)$ и $p = p(t, x)$ – парциальная плотность матрицы и давление соответственно, $\chi = \chi(t, x)$ – коэффициент трения, t – время, $x = (x, y, z)$ – точка из R^3 .

Как отмечено в [6], обычно при рассмотрении задач изотермической нестационарной прямолинейно-параллельной фильтрации однородной жидкости в изотропной пористой среде с учетом конечной скорости распространения возмущений пользуются законом фильтрации

$$w + \tau \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{k}{\mu_{жс}} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь τ – постоянная размерности времени, k – коэффициент проницаемости, $\mu_{жс}$ – вязкость жидкости.

Сравнивая первое уравнение (2) с уравнением (3), получим выражение для определения постоянного τ через коэффициент трения χ_0 и парциальную плотность жидкости $\rho_{0,l}$ в модели Доровского

$$\tau = \frac{1}{\chi_0 \rho_{0,l}}.$$

В работе исследуется одномерная прямая задача распространения сейсмических волн в пористой среде.

Постановка задачи

Рассмотрим распространение сейсмических волн в неоднородной пористой среде с учетом потери энергии обусловленным коэффициентом трения $\chi(x)$:

$$\rho_s(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \chi(x) \rho_l^2(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \chi(x)\rho_l(x)(u - v) = 0, \quad (5)$$

Чтобы найти решение данной системы в виде бегущей волны, мы воспользуемся техникой преобразования (отображения), сводящей систему уравнений (4), (5) с переменными коэффициентами к системе уравнений с постоянными коэффициентами [4-6]. Для этого сделаем следующую подстановку в систему уравнений (4), (5):

$$u(t, x) = A(x)U(t, \xi(x)), \quad (6)$$

$$v(t, x) = A(x)V(t, \xi(x)), \quad (7)$$

где $A(x)$, $U(t, \xi)$, $V(t, \xi)$ и $\xi(x)$ – четыре неизвестные функции, подлежащие определению. Затем данная система уравнений (4), (5) преобразуется в систему уравнений с переменными коэффициентами

$$A(x) \left[\rho_s(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu(x) \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] + (\mu(x)A'(x))' U - A(x)\chi(x)\rho_l^2(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0, \quad (8)$$

$$A(x) \frac{\partial V}{\partial t} + A(x)\chi(x)\rho_l(x)(U - V) = 0 \quad (9)$$

Поскольку система (8), (9) содержит три неизвестные функции, можно наложить три условия для их однозначного определения. В работах [7] был предложен следующий выбор этих условий в форме трёх уравнений:

$$c_t^2(x) \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 = 1, \quad (10)$$

$$\frac{dc_t}{dx} + 2 \frac{c_t}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{c_t}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dx} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho_s A} \frac{d}{dx} \left(\rho_s c_t^2 \frac{dA}{dx} \right) = P, \quad (13)$$

где P – произвольная константа. При выполнении условий (10)-(13) система уравнений (8), (9) сводится к системе уравнений вида с постоянными коэффициентами при старших производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - PU - \omega(x)\varepsilon(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \omega(x)(U - V) = 0, \quad (15)$$

где $\omega(x) = \chi(x)\rho_l(x)$, $\varepsilon(x) = \frac{\rho_l(x)}{\rho_s(x)}$.

Из системы уравнений (14), (15) следует существование затухающих бегущих волн (в частности, монохроматических бегущих волн). Если волна не монохроматическая, мы можем использовать преобразование Фурье или Лапласа для анализа формы волны. Тем не менее, волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, не взаимодействуют между собой.

Уравнение (10) называется уравнением эйконала [8, 9] и определяет переход к фазе волны (для определенности взята волна, распространяющаяся вправо) или время прохождения

$$\xi = \int_{x_0}^x \frac{dy}{c_t(y)}. \quad (16)$$

Уравнение (11) определяет связь между амплитудой волны и акустической жесткости пористой среды ($\rho_s(x)c_t(x)$)

$$A(x) = \frac{const}{\sqrt{\rho_s(x)c_t(x)}}. \quad (17)$$

и эта формула совпадает со знаменитым законом Грина (для жидких сред в случае постоянстве плотности), известным из закона сохранения потока энергии в средах с медленно меняющимися параметрами [10, 11]. Отметим, что здесь мы не накладываем условие на медленное изменение среды с глубиной.

Заключение

Многие породы являются сложным для изучения объектом, причем эта сложность во многом обусловлена наличием трещиноватости и пористости. В нашей работе в рамках континуальной теории фильтрации рассмотрено распространение сейсмических поперечных волн в горной породе, содержащей параметры флюидонасыщенности и пористости. Проблема существования бегущих волн в неоднородной пористой среде важна для объяснения распространения волн на большие расстояния. Рассмотрены новые решения волновых уравнений с переменными коэффициентами, описывающих бегущие SH волны в пористой среде с учетом диссипации энергии. Такие решения получены с использованием методов преобразования, когда уравнения с переменными коэффициентами могут быть сведены к уравнению с постоянными коэффициентами.

Исследования Имомназарова Б.Х. и Имомназарова Х.Х. выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН FWNM-2025-0004.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. N. Y.: – Nova Science Publ. – 1995.
2. Ихсанова Р. А., Молокович Ю. М. Прямолинейно-параллельная фильтрация с учетом конечной скорости распространения возмущений // Исследования по подземной гидромеханике. Вып. 9. – Казань – 1987, С. 72–78.
3. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустр. матем. – 2001. № 4:2. С. 154 –165.

4. Bluman G. On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations // SIAM J. Appl. Math. – 1983. - V. 43. - P. 1259–1273.
5. Varley E.; Seymour B. A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients // Stud. Appl. Math. – 1988. – V. 78. - P. 183–225.
6. Grimshaw R.; Pelinovsky D.; Pelinovsky E. Homogenization of the variable-speed wave equation // Wave Motion. – 2010. V. 47. - P. 496–507.
7. Didenkulova I.; Pelinovsky E.; Soomere T. Long surface wave dynamics along a convex bottom // J. Geophys. Res. Ocean. – 2009. – V. 114. - C07006.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1973. – 716 с.
9. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными //Серия: Университетская серия– Издательство: Тамара Рожковская, 2003.
10. Brekhovskikh L. M. Waves in Layered Media; Academic Press: – Cambridge MA. - USA, 1976. - ISBN 9780323161626.
11. Mei C. C. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. - World Scientific: Singapore, 1989.

© Б. Х. Имомназаров, Х. Х. Имомназаров, И. К. Искандаров, 2026