

*В. Л. Рупосов*¹✉

Сравнение методов треугольников и обратных взвешенных расстояний для подсчета объемов и запасов

¹Иркутский национальный исследовательский технический университет,
г. Иркутск, Российская Федерация
e-mail: ruposov@istu.edu

Аннотация. В статье рассматриваются два метода подсчета объема рудного тела и запаса полезного ископаемого. Оценка данных показателей производилась по пяти различным рудным телам месторождений россыпного золота. Вычисление объемов рудных тел и запасов обосновываются математическими формулами расчета усеченных кососрезанных призм в методе треугольников и подходами к расчету степенных коэффициентов для расчета весов метода обратных взвешенных расстояний. Полученные результаты анализируются по уровню разброса рассчитанных показателей объема и запасов относительно метода треугольников. Произведенный анализ приводит к выводу о сложности и неоднозначности использования различных коэффициентов степени метода обратных взвешенных расстояний относительно метода треугольников. Наиболее сложным оказался анализ изменчивости содержаний полезного компонента по сравнению с вычислением объемов рудных тел.

Ключевые слова: Метод подсчета объемов, оценка запасов полезных ископаемых, метод треугольников (призм), метод обратных взвешенных расстояний

*V. L. Ruposov*¹✉

Comparisons of the triangle method and inverse weighted distances for counting volumes and reserves

¹Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation
e-mail: ruposov@istu.edu

Abstract. The article discusses two methods for counting the volume of an ore body and the reserve of a mineral resource. These indicators were evaluated for five different ore bodies of placer gold deposits. The calculation of ore body volumes and reserves is based on mathematical formulas for calculating truncated oblique prisms in the triangle method and approaches for calculating power coefficients for calculating the weights of the inverse weighted distance method. The results are analyzed based on the level of dispersion of the calculated volume and reserve values relative to the triangle method. The analysis reveals the complexity and ambiguity of using different power coefficients in the inverse weighted distance method compared to the triangle method. The analysis of the variability of ore grade content proved to be more challenging than the calculation of ore body volumes.

Keywords: Volume counting method, mineral reserves estimation, triangle (prism) method, inverse weighted distance method

Введение

Подсчет объемов различными методами может приводить к неодинаковым результатам, особенно когда объект невозможно увидеть и оценить его геометрию.

Низкая плотность данных приводит к поиску возможностей подсчитать объем с большей точностью, за счет применения сложных алгоритмов, учитывающих закономерности полученных через пространственные расположения точек опробования. С такими проблемами сталкиваются геологи и маркшейдеры при подсчете объемов рудных тел различной сложности. При низкой плотности разведочной сети процесс расчета объемов и запасов полезного ископаемого может быть обоснован за счет использования геостатистических методов интерполяции в пространстве. Для реализации таких решений требуются большое количество расчетов. Современные методы расчетов объемов позволяют использовать сложные алгоритмы, что связано с высокой производительностью существующей вычислительной техники. В статье приводятся результаты исследований двух методов подсчета объемов руды для различных месторождений россыпного золота. Первый, классический метод треугольников, второй метод обратных взвешенных расстояний. Использование данных методов должно происходить с учетом особенностей строения месторождения рудных полезных ископаемых.

Методы и материалы

Метод треугольников или триангуляции предназначен для определения объемов различных объектов с непрерывной поверхностью имеющих верхнюю (кровлю) и нижнюю (подошву) границу. Развитие данного метода было связано с простотой расчета объемов рудного тела особенно при низкой плотности разведочной сети. Еще в 60-е годы XX века данный метод был представлен в учебниках по поиску и разведки месторождений [1], и потом встречался у разных авторов [2 -12] учебники которых стали классической литературой по подсчету запасов твердых полезных ископаемых. С первых работ данный метод сильно критиковали по нескольким причинам [1]. В середине XX века за сложность расчетов, даже предпринимаются попытки снизить количество вычислений за счет внедрения весов, что сейчас неактуально в связи с большим распространением вычислительной техники, даже наоборот, в данном исследовании предлагаются более сложные формулы, которые являются математически точными. Другой проблемой считалось, что применять данный метод можно только для субгоризонтальных тел, сложная геометрия призм может давать большую ошибку. Применение точных математических формул эту проблему полностью снимает. Когда деление на треугольники производилось вручную, то вставал вопрос интерпретации создаваемой триангуляционной сети, с распространением подхода на основе триангуляции Делоне [13], позволяет создавать наиболее оптимальную сеть. Невозможность разбиения на сорта, как отмечает Смирнов В.И. [1], составляет один из немногих нерешенных вопросов, но это больше связано с пространственным распределением содержания полезного компонента, а не с определением объема рудного тела.

Современный подход к методу треугольников основан на представлении объема не как набора треугольников с мощностью, измеренной в узлах, а как набор кососрезанных треугольных призм, каждая призма по своей стороне имеет соседнюю призму с одинаковыми сторонами, такой способ правильней было бы называть призматический, так как мощности уже отдельно не выделяются, а в

расчетах используются шесть отдельно стоящих точек с трехмерными координатами [14]. Для точного математического определения объема призмы, которое не будет зависеть от геометрии и не требует строго вертикальных мощностей используем способ разделения усеченной призмы на три треугольных пирамиды с известными координатами. На рисунке 1 представлена схема расположения кососрезанных треугольных призм и разделение призмы на пирамиды с треугольником в основании.

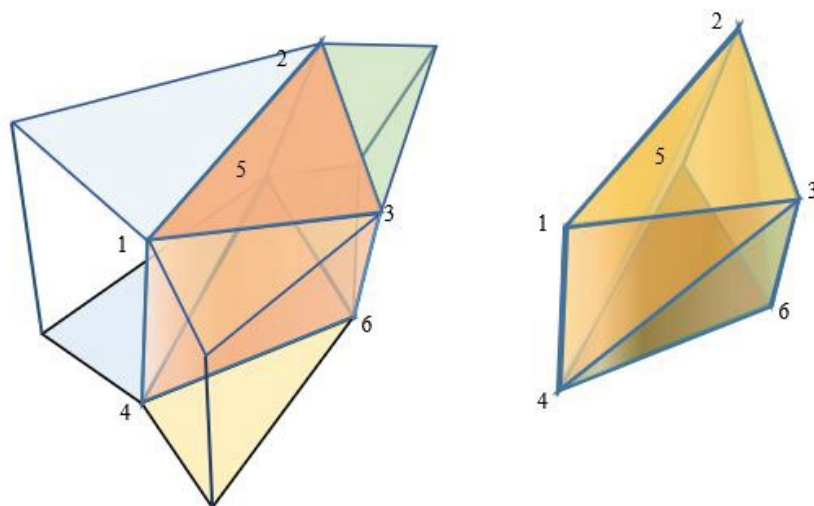


Рис. 1. Схема представление усеченных призм и деления призмы на треугольные пирамиды.

Для расчета усеченной кососрезанной треугольной призмы используем векторные формулы определения объемов треугольных пирамид, сумма данных трех элементарных объемных геометрических фигур позволит вычислить искомую величину. Для этого используем формулу (1), позволяющие рассчитывать призму любой сложности [15], что снимает требования к расчету вертикальной мощности, которая требуется при использовании классической формулы, где объем определяется через произведение средней вертикальной мощности по трем скважинам и площади проекции треугольника на плоскость. Использование предлагаемой формулы позволяет оценивать сложные рудные тела, а не только субгоризонтальные [16].

$$V_{\text{призм}} = V_{1234} + V_{2456} + V_{3246}$$

$$V_{\text{призм}} = \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \\ x_5 - x_2 & y_5 - y_2 & z_5 - z_2 \\ x_6 - x_2 & y_6 - y_2 & z_6 - z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \\ x_6 - x_2 & y_6 - y_2 & z_6 - z_2 \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

Недостатком метода так и остается подход к подсчету металла, являющийся произведением объема призмы на среднее значение содержания полезного компонента по трем скважинам, закономерности определенные, например, геостатистическими методами учитывать невозможно. Вторым недостатком является обязательное прохождение скважины через все рудное тело с опробованием от кровли до подошвы пласта. Если скважина прервалась внутри рудного тела, данный метод затруднительно использовать.

Метод обратных взвешенных расстояний является одним из самых гибких методов интерполяции пространственных данных. Метод, как и все инструменты геостатистики, основан на зависимости интерполируемой точки от расстояний до точек с результатами опробования исследуемого полигона. Метод обратных взвешенных расстояний или IDW основан на весовой функции к существующим точкам опробования, которая рассчитывается по формулам средне-взвешенного значения

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}, \quad (2)$$

где вес определяется как обратное расстояние между интерполируемой точкой и i -той точкой опробования в степени t .

$$p = \frac{1}{d^t}, \quad (3)$$

где d – расстояние от точки опробования до точки интерполирования [17].

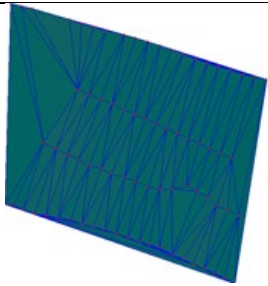
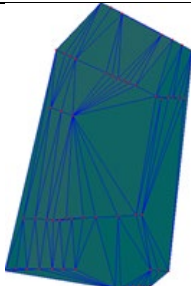
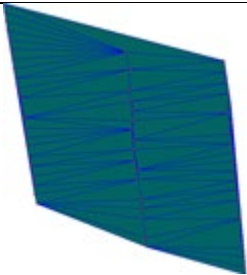
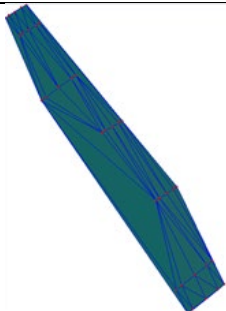
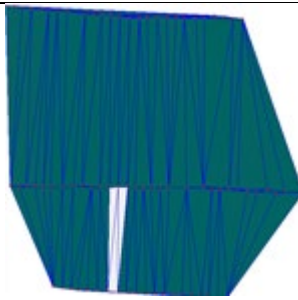
Настройка данного метода для точного подсчета объемов может происходить по двум направлениям, первое изменение значения степенного коэффициента в весовой функции, второе размер и конфигурация области поиска значений. У метода есть серия недостатков, которые характерны всем геостатистическим подходам, например, необоснованная экстраполяция, особенно для больших расстояний. Так если взять любую точку на плане, к ней всегда можно рассчитать значение исследуемого показателя, даже если это, в связи с большой удаленностью, не имеет смысла. Вторым недостатком является дискретность получаемых данных, точность расчетов напрямую зависит от размера матрицы, которую вычисляем для создания искомой поверхности. Размер матрицы влияет на время обработки исходных данных, поэтому избыточная плотность точек приводит к необоснованным затратам. Поэтому в данном исследовании использовались степенные коэффициенты весовой функции от 0,1 до 6. Радиус поиска

ближайшей точки не задавался, в расчетах участвовали все скважины, вынесенные на план.

Результаты

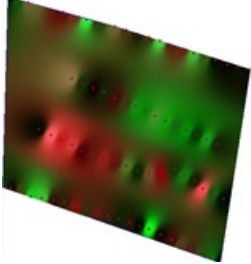
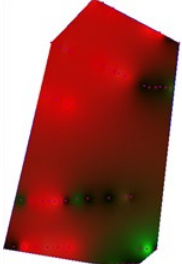
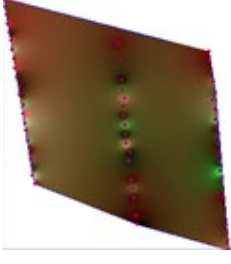
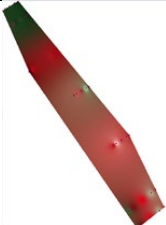
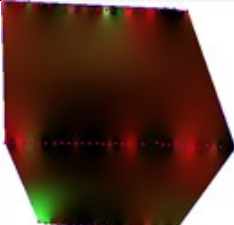
Для исследования вопроса подсчета объемов рудного тела использовались данные россыпных месторождений золота, которые находятся в различных частях Бодайбинского района Иркутской области. Расчеты выполнялись по пяти рудным телам. Оценка методом призм или треугольников производилась разбиением скважин опробования триангуляцией Делоне, для каждого треугольника вычислялся объем методом призм и средние значение для трех скважин содержание золота. Все расчеты по данному методу были сведены в таблицу 1, где приведены схемы разбивки на треугольники и значение объема рудного тела и запасов металла.

Таблица 1. Результаты расчетов объемов и запасов золота методом призм

<i>№ Рудного тела</i>	1	2	3
<i>Объем, м³</i>	330167	689119	44252
<i>Запасы, кг.</i>	309,0	249,1	72,9
<i>Схема</i>			
<i>№ Рудного тела</i>	4	5	
<i>Объем, м³</i>	960580	72063	
<i>Запасы, кг.</i>	249,1	94,6	
<i>Схема</i>			

Во второй таблице представлены данные подсчета объема рудных тел и запасов методом обратных взвешенных расстояний при различных значениях степенного коэффициента. На схемах, выполненных для степенного коэффициента 2, цветовой палитрой иллюстрируется богатые и бедные зоны рудных тел.

Таблица 2. Расчет объемов и запасов методом обратных взвешенных расстояний

№ Рудного тела	1		2		3	
	Объем, м ³	Запасы, кг	Объем, м ³	Запасы, кг	Объем, м ³	Запасы, кг
Степень 0,1	324564	307,9	675131	434,1	49580	88,85
Степень 0,5	330186	313,9	682252	425,1	48844	87,66
Степень 1	337004	319,4	693284	398,9	47965	86,10
Степень 2	348081	321,1	708514	330,6	46616	83,52
Степень 3	353181	319,2	711682	288,1	45965	82,16
Степень 4	354418	318,8	711574	265,0	45656	81,57
Степень 5	354271	319,6	711080	251,3	45477	81,33
Степень 6	353814	321,1	710717	242,3	45353	81,26
						
№ Рудного тела	4		5			
	Объем, м ³	Запасы, кг	Объем, м ³	Запасы, кг		
Степень 0,1	930084	259,69	74016	96,34		
Степень 0,5	949528	268,26	73077	92,00		
Степень 1	975394	280,24	72487	88,46		
Степень 2	1014996	297,83	72477	87,75		
Степень 3	1033883	305,60	72842	90,21		
Степень 4	1042300	308,07	73130	92,95		
Степень 5	1046362	308,14	73311	95,32		
Степень 6	1048475	307,11	73430	97,29		
Схема						

Обсуждение

По результатам подсчета объемов и запасов металла был произведен расчет отклонений значений полученных способом треугольников (призм) и методом обратных взвешенных расстояний. За базис был взят метод треугольников, отклонение от которого в процентах позволило оценить разброс полученных данных. Данные относительного отклонения не показывают насколько вычисленные значения объемов рудных тел и металла отличаются от истинных запасов, так как для этого необходимы данные по полностью отработанному месторождению, хотя и в этом случае, из-за большой ошибки опробования и влияния процессов потерь и разубоживания, нельзя установить точные параметры рудных тел. Такие исследования можно сделать только на имитационной математической модели [8].

Результаты исследований были сведены на график (рисунок 2), на котором группы отдельно стоящих точек характеризуют разброс, по вертикали запасов, по горизонтали объемов рудных тел. Было выявлено, что разброс отклонений от метода треугольников (призм) по объемам значительно ниже, чем по запасам полезного ископаемого, что вытекает из сложности распределения содержаний золота в россыпных месторождений, следовательно разброс подсчета объемов рудных тел не высокий и находится в пределах от 0,01% до 12%. А отклонение подсчета запасов методом обратных взвешенных расстояний от метода треугольников находится в пределах от 0,4 до 74,3%, что указывает на неоднородность и сложность распределения содержаний золота. Усугубляет данную ситуацию и то, что ошибку подсчета запасов несут все методы и оценка отклонений всегда условная, так как неизвестен истинный запас металла.

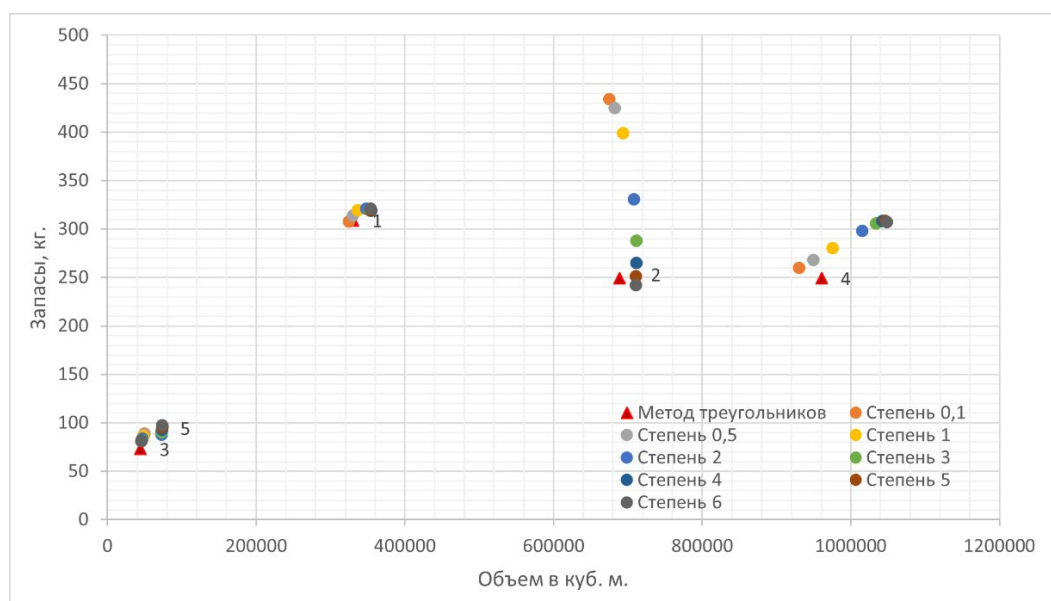


Рис. 2. Отклонения запасов и объемов рудных тел по пяти рудным телам. Кружками обозначены расчеты методом обратных взвешенных расстояний

Еще одним выводом в результате исследования является определение отсутствия зависимости степенного коэффициента в методе обратных взвешенных расстояний к результату, который показал метод треугольников (призм). Так по подсчету объемов наименьшее отклонение для первого рудного тела равно 0,01 для степенного коэффициента 0,5, а для третьего рудного тела минимальное отклонение 2,5% оказалось при степени 6, для пятого рудного тела минимальное отклонение 0,57 соответствуют степени 2. Максимальный разброс по определению объемов для разных рудных тел был при степенном коэффициенте равном 4, 3, 0.1 и 6. Расчет запасов полезного компонента еще меньше укладывается в закономерности эффективности конкретного степенного коэффициента, так для самого маленького разброса 0,4% (первое рудное тело) и для самого большого 74% (второе рудное тело) данный показатель составил 0,1.

Основным выводом исследования является неоднозначность применения представленных способов расчета объемов и запасов полезного ископаемого.

Оценка точности того или иного метода подсчета запасов, как классического, так и нового, возможна только на основе имитационной математической модели, где все параметры рудного тела известны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов, Владимир Иванович. Подсчет запасов минерального сырья [Текст] / В. И. Смирнов. – Москва : Госгеолиздат, 1950. – 343 с.
2. Крейтер, В. М. Поиски и разведка месторождений полезных ископаемых. Учебник для вузов / В. М. Крейтер – М.: Недра, 1969. – 384 с.
3. Каждан, А. Б. Разведка месторождений полезных ископаемых. Учебное пособие для вузов / А. Б. Каждан – М.: Недра, 1977. – 327 с.
4. Четвериков Л. И. Теоретические основы разведки недр. – М.: Недра, 1984. – 156 с.
5. Аристов, В. В. Поиски твердых полезных ископаемых. Учебное пособие для вузов / В. В. Аристов – М.: Недра, 1975. – 253 с.
6. Александров В. Н., Осипович Н. В. Методы разведки твёрдых полезных ископаемых: учеб. пособие. – М.: Академия, 2018. – 320 с.
7. Попов А. С., Самсонов В. И. Совершенствование методик разведки трудноизвлекаемых рудных тел. – Саратов: СГУ, 2016. – 260 с.
8. Шевелев В. В. Разведка и геолого-экономическая оценка месторождений твёрдых полезных ископаемых: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2004. – 367 с.
9. Бурый Э. Н., Карнаухов А. П. Теория и практика разведки твёрдых полезных ископаемых. – Томск: Изд-во ТПУ, 2015. – 412 с.
10. Краснощёров А. И., Чичагов Г. А. Геологоразведочные работы на рудных месторождениях. – Новочеркасск: Южно-Российский государственный технический ун-т, 2012. – 280 с.
11. Левицкий Г. В. Глубинная разведка твёрдых полезных ископаемых. — Екатеринбург: УРГТУ, 2017. – 240 с.
12. Николаев А. В. Новые направления и перспективы в изучении рудных месторождений. – Воронеж: ВГУ, 2019. – 300 с.
13. Анализ методов создания триангуляции из облака точек / В. Л. Рупосов, А. А. Ицков, В. И. Алилуева, Е. В. Рупосова // Перспективы развития горно-металлургической отрасли : Материалы XXIV Всероссийской научно-практической конференции, Иркутск, 28 ноября – 03 декабря 2024 года. – Иркутск: Иркутский национальный исследовательский технический университет, 2024. – С. 146-151. – EDN CLWVDL.
14. Смоленцева, А. М. Аналитический способ нахождения объема треугольника по шести точкам / А. М. Смоленцева, В. Л. Рупосов // Перспективы развития горно-металлургической отрасли (Игошинские чтения) : Материалы конференции Всероссийской научно-практической конференции, Иркутск, 26 ноября 2021 года. Том 1. – Иркутск: Иркутский национальный исследовательский технический университет, 2022. – С. 122-126. – EDN SQATWP.
15. Разработка алгоритмов для автоматического подсчета запасов / Н. Е. Спичка, С. С. Инкеев, А. Ю. Тугулханов, В. Л. Рупосов // Геология, поиски и разведка полезных ископаемых и методы геологических исследований : Материалы Международной научно-технической конференции, Иркутск, 04–08 апреля 2022 года. Том Выпуск 22. – Иркутск: Иркутский национальный исследовательский технический университет, 2022. – С. 191-196. – EDN LRBDWT.
16. Рупосов В. Л. Оценка методов треугольников и ближайших районов при подсчёте запасов твёрдых полезных ископаемых // Горный журнал. – 2026. – № 4. – С. 14–19.
17. Новиков Е. С., Рупосов В. Л. Исследование методов обратных расстояний // Геология, поиски и разведка полезных ископаемых и методы геологических исследований: матер. XIX Всероссийской науч.-техн. конф. – Иркутск: Иркутский национальный исследовательский технический ун-т, 2024. С. 171–177.

© В. Л. Рупосов, 2026