

А. Д. Штейн¹✉, М. И. Протасов¹

Частотно-зависимые лучевые решения: исследование на модельных примерах

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: shteynad@ipgg.sbras.ru

Аннотация. Численно исследован алгоритм расчёта частотно-зависимых лучевых решений, основанный на структурно-ориентированном сглаживании скоростной модели. На реалистичных синтетических моделях проведено сравнение лучевых траекторий и годографов времён пробега. Полученные результаты качественно согласуются с «точными» частотно-зависимыми лучевыми решениями, что подтверждает корректность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: лучевое трассирование, структурно-ориентированное сглаживание, частотная зависимость

A. D. Stein¹✉, M. I. Protasov¹

Frequency dependent ray solutions: investigation on model examples

¹Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics of the Siberian Branch
of the RAS, IPGG SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: shteynad@ipgg.sbras.ru

Annotation. A numerical study is performed for an algorithm for computing frequency-dependent ray solutions based on structure-oriented smoothing of the velocity model. A comparison of ray trajectories and traveltime hodographs is carried out using realistic synthetic models. The obtained results qualitatively agree with the “exact” frequency-dependent ray solutions, confirming the correctness of the developed algorithm.

Keywords: ray tracing, structure-oriented smoothing, frequency dependence

Введение

В основе лучевого метода лежит представление волнового поля в виде лучей – траекторий, ортогональных волновым фронтам, вдоль которых энергия переносится в соответствии с принципом Ферма. Для перехода от системы уравнений динамической теории упругости к лучевому методу вводятся два приближения: первое предполагает, что фаза линейно зависит от частоты, а второе заключается в том, что решение получают в виде асимптотического лучевого ряда, что соответствует приближению высоких частот [1]. Лучевой метод является более вычислительно эффективным, но менее точным по сравнению с методами расчёта волнового поля, которые не используют подобных упрощений.

Вследствие введения приближений лучевой метод имеет ряд ограничений. Основными ограничениями являются численная неустойчивость при рассмотрении геологических сред с резкими контрастами скоростей сейсмических волн, а

также несоответствие лучевых решений на низких частотах волновому полю. Для преодоления ограничений и повышения устойчивости лучевого метода используют частотно-зависимые модификации.

В рамках развития лучевого метода был разработан алгоритм расчёта частотно-зависимых времён пробега сейсмических волн [2], состоящий из двух модулей: модуля структурно-ориентированного частотно-зависимого сглаживания скоростной модели и модуля двухточечного лучевого трассирования на основе решения уравнения эйконала. Частотная зависимость для лучевого трассирования учитывается при сглаживании скоростной модели в зависимости от частоты. Алгоритм был использован для получения решений в ряде реалистичных синтетических моделей, где частотно-зависимые лучи сравнивались с высокочастотными решениями и с волновыми полями.

В работе [3] рассматривается алгоритм получения лучевых решений при известном решении уравнения Гельмгольца. Также показано, что траектории «точных» лучей значительно отличаются от траекторий высокочастотных лучей при рассмотрении на средних и низких частотах. В работе [4] было проведено сравнение между «точными» и высокочастотными лучевыми решениями на ряде синтетических моделей – метод, разработанный в работе [3], был программно реализован и проверен.

В рамках данной работы выполнено сравнение лучевых решений, полученных алгоритмом расчёта частотно-зависимых времён пробега сейсмических волн, с «точными» лучевыми решениями в ряде синтетических моделей, которые были рассмотрены в работе [4].

Методы и материалы

Структурно-ориентированное частотно-зависимое сглаживание

В условиях ограниченного частотного диапазона энергия сейсмической волны распространяется не только вдоль луча, но и в окружающей его области, известной как зона Френеля [5]. Реализован алгоритм сглаживания, позволяющий учитывать влияние зоны Френеля.

При сглаживании по зоне Френеля используется модификация сглаживания на основе функции Гаусса. В результате скорость в точке рассчитывается по формуле:

$$c_{sm}(x_{i_0}, z_{j_0}) = \frac{\sum_{i=i_0-N_x}^{i_0+N_x} \sum_{j=j_0-N_z}^{j_0+N_z} w_{ij} \cdot c(x_i, z_j)}{\sum_{i=i_0-N_x}^{i_0+N_x} \sum_{j=j_0-N_z}^{j_0+N_z} w_{ij}}, \quad (1)$$

где $c_{sm}(x_{i_0}, z_{j_0})$ – сглаженная скорость в точке; $c(x_i, z_j)$ – скорость в точке (i, j) окна сглаживания; w_{ij} – весовая функция, состоящая из двух экспонент, отвечающих за сглаживание вдоль и поперёк градиента поля времён. Она рассчитывается по формуле:

$$w_{ij} = e^{-4\alpha_{ij}|p|^2(\cos \beta)^2} \cdot e^{-\alpha_{ij}|p|^2(\sin \beta)^2}, \quad (2)$$

где $\cos \beta$ – угол между вектором $\vec{p}$ из точки (x_{i_0}, z_{j_0}) в точку (x_i, z_j) и вектором $\vec{n}$ градиента поля времён в точке (x_i, z_j) ; α_{ij} – коэффициент, вносящий зависимость от физических свойств. Он вычисляется по формуле

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\left(\frac{m\lambda_{ij}}{2}\right)^2} = \frac{4\nu^2}{m^2 c_{ij}^2}, \quad (3)$$

где ν – частота, m – номер зоны Френеля. Угол β задаёт направление сглаживания и вычисляется по формуле:

$$\beta(x_i, z_j) = \arccos\left(\frac{(\vec{p} \cdot \vec{n})}{|\vec{p}||\vec{n}|}\right); \quad \vec{p} = (x_i - x_0, z_j - z_0); \quad \vec{n} = \left(\frac{\partial T(x_i, z_j)}{\partial x}, \frac{\partial T(x_i, z_j)}{\partial z}\right), \quad (4)$$

где $T(x_i, z_j)$ – поле времён, известное в каждой точке скоростной модели $c(x_i, z_j)$. Константа в экспоненте, которая отвечает за сглаживание вдоль градиента поля времён, выбрана равной 4 в соответствии с границами зоны Френеля.

Трассирование лучей на основе решения уравнения эйконала

После получения сглаженной модели скоростей на определённой частоте, для источников решается уравнение эйконала и выполняется двухточечное трассирование лучей.

При решении одноточечной задачи происходит расчёт лучевых решений из источника при разных направлениях распространения лучей. Такой подход не позволяет получать лучи, которые попадут точно в приёмник. Для получения лучевого решения в приёмнике обычно выполняется интерполяция значений ближайших к нему лучевых решений. Это требует расчёта большого количества лучей, а также затрат на интерполяцию лучевых решений в каждый приёмник. Решение двухточечной задачи трассирования лучей, расчёт лучей от источника в приёмники, является более эффективным и более сложным подходом по сравнению с решением одноточечной задачи. Эффективность обусловлена тем, что нужно рассчитывать значительно меньше лучей, их количество определяется количеством пар источник-приёмник. Также не требуется интерполяция лучевых решений в приёмники.

Принцип Ферма заключается в том, что сейсмическая волна распространяется между источником A и приёмником B по такой кривой l (называемой лучом), которая обеспечивает минимум времени пробега T в интеграле Ферма [1]:

$$T(l) = \int_A^B \frac{ds}{c(x, z)}. \quad (5)$$

Для расчёта лучей можно использовать подход, описанный в статье [6]. Он заключается в том, что рассчитанное поле времён соответствует минимальному времени в интеграле Ферма, и траектория кривой может быть получена при трассировании луча от приёмника в источник, при этом направление трассирования вычисляется через производные от поля времён:

$$\vec{p} = -\nabla T. \quad (6)$$

Лучи являются решениями системы уравнений Эйлера [1], которая с учётом уравнения (6) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -c(x, z) \cdot \frac{\partial T(x, z)}{\partial x}; \\ \frac{dz}{ds} = -c(x, z) \cdot \frac{\partial T(x, z)}{\partial z}. \end{cases} \quad (7)$$

Важным уточнением является тот факт, что трассирование при данном подходе от источника в приёмник невозможно, так как в источнике производная времени пробега не существует. Однако согласно принципу взаимности, если источник и приёмник поменять местами, параметры рассчитанного луча не изменятся, поэтому трассирование проводится от приёмника в источник.

Для вычисления поля времён используется реализация метода быстрой маршрутизации второго порядка аппроксимации [7], доступная в пакете программного обеспечения с открытым доступом и исходным кодом Madagascar [8]. Расчёт производных поля времён выполняется конечно-разностным методом со вторым порядком аппроксимации.

Результаты

Приведены результаты сравнения лучевых решений в двух моделях однородной среды с включениями: в первой модели включение представляет собой отрицательную аномалию скорости, а во второй – положительную. Модели были приближены к использованным в работе [4], чтобы траектории лучевых решений также были близкими.

На рисунке 1 показаны результаты численных экспериментов для модели с отрицательной аномалией скорости. Траектории высокочастотных лучевых решений (20 Гц) огибают низкоскоростную аномалию, времена пробега на частоте 20 Гц близки к временам пробега лучевых решений для приближения бесконечной частоты. На частоте 1 Гц лучевые решения распространяются сквозь низкоскоростную аномалию. Наблюдается значительное различие между годографами, причём не только количественное, но и качественное – годограф времён пробега для частоты 1 Гц имеет одну точку минимума на интервале приёмников от 1000 до 3000, а годограф высокочастотных времён пробега имеет две таких точки.

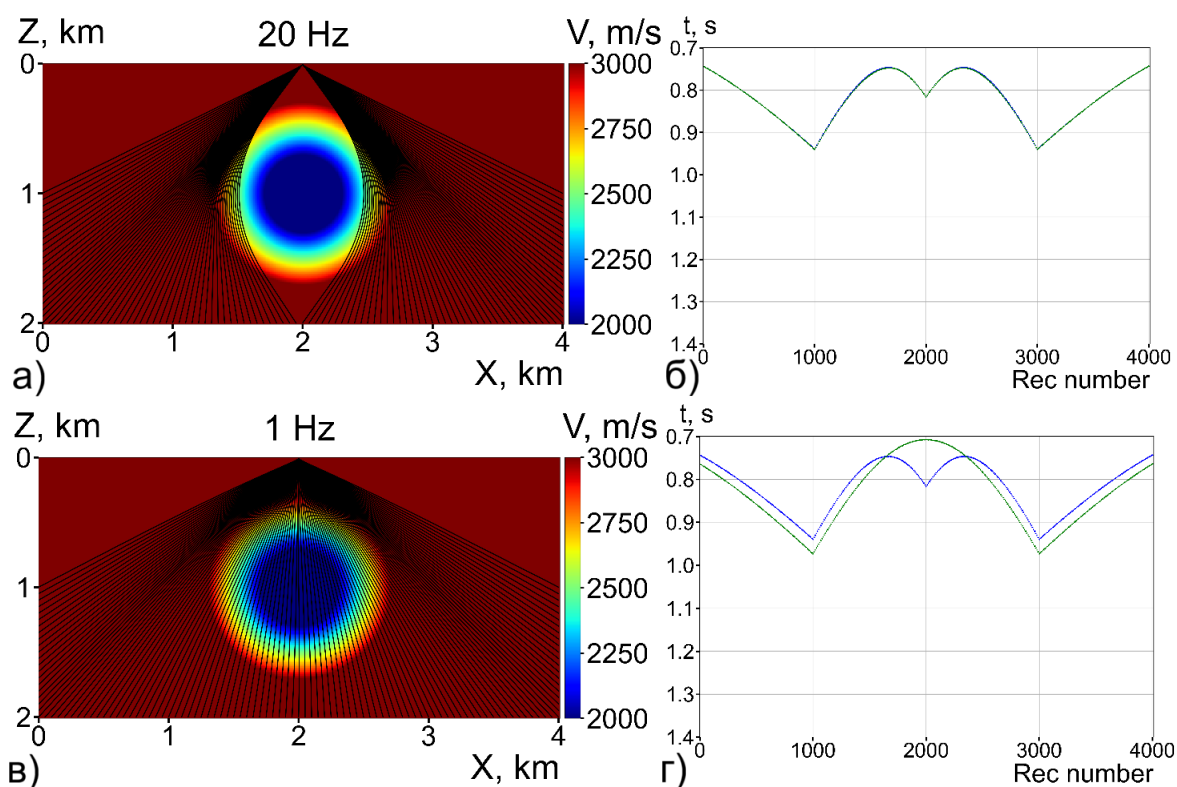


Рис. 1. Результаты численных экспериментов для модели с отрицательной аномалией скоростей: лучевые решения на частоте: а) 20 Гц, в) 1 Гц и годографы времён пробега на частоте: б) 20 Гц, г) 1 Гц. Синим цветом показан годограф первых вступлений для приближения бесконечной частоты, зелёным цветом показаны частотно-зависимые времена пробега. Приемники расположены на левой границе (на глубине от 1 до 2 км), на первых 1000 м на графике времён пробега, на нижней границе (от 1000 до 3000 м на графике времён пробега) и на правой границе (последние 1000 м на графике времён пробега).

На рисунке 2 показаны результаты численных экспериментов для модели с положительной аномалией скорости. Траектории высокочастотных лучевых решений (20 Гц) сгущаются в области аномалии. Времена пробега на частоте 20 Гц близки к временам пробега лучевых решений для приближения бесконечной частоты. На частоте 1 Гц лучевые решения имеют регулярные траектории, охватывая всю область нижней части модели. Наблюдается значительное различие между годографами высокочастотных и низкочастотных лучевых решений.

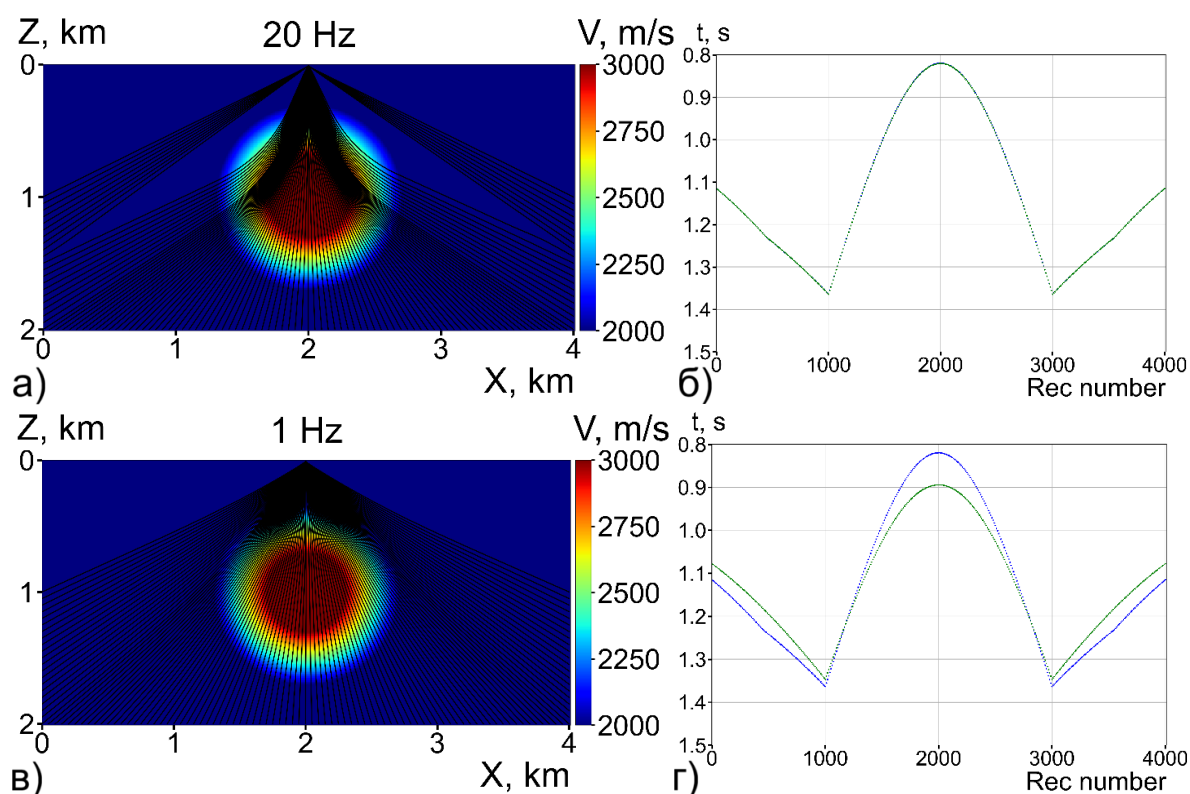


Рис. 2. Результаты численных экспериментов для модели с положительной аномалией скоростей:

лучевые решения на частоте: а) 20 Гц, в) 1 Гц и годографы времён пробега на частоте:

б) 20 Гц, г) 1 Гц. Синим цветом показан годограф первых вступлений для приближения бесконечной частоты, зелёным цветом показаны частотно-зависимые времена пробега. Приемники расположены на левой границе (на глубине от 1 до 2 км), на первых 1000 м на графике времён пробега, на нижней границе (от 1000 до 3000 м на графике времён пробега) и на правой границе (последние 1000 м на графике времён пробега).

Заключение

В работе на модельных примерах исследованы траектории лучевых решений и времена пробега, полученные с использованием алгоритма расчёта частотно-зависимых времён пробега сейсмических волн. Предлагаемый подход позволяет учитывать конечную ширину зоны Френеля и, как следствие, воспроизводить эффекты распространения сейсмических волн на низких частотах, которые принципиально отличаются от высокочастотного приближения. В модели с отрицательной аномалией скорости низкочастотные лучи (1 Гц) проходят сквозь аномалию, тогда как высокочастотные (20 Гц) огибают её, что приводит к качественному различию годографов времён пробега. В модели с положительной аномалией высокочастотные лучи фокусируются внутри аномалии, тогда как низкочастотные демонстрируют регулярное поведение, охватывая всю область модели. Полученные результаты качественно согласуются с «точными» лучевыми решениями, рассчитанными на основе решения уравнения Гельмгольца в работе [4], что подтверждает корректность предложенного алгоритма.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ FWZZ-2026-0050.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Popov M. M. Ray theory and gaussian beam method for geophysicists. – Salvador : EDUFBA, 2002. – 172 p.
2. Foreman T. L. An exact ray theoretical formulation of the Helmholtz equation // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1989. – Vol. 86, No. 1. – P. 234–246.
3. Protasov M., Gadyshin K. Computational method for exact frequency-dependent rays on the basis of the solution of the Helmholtz equation // Geophysical Journal International. – 2017. – Vol. 210, No. 1. – P. 525–533.
4. Штейн А. Д., Протасов М. И. Алгоритм расчета частотно-зависимых времен пробега сейсмических волн // Геофизика. – 2025. – № 6. – С. 10–15.
5. Červený V., Soares J. E. P. Fresnel volume ray tracing // Geophysics. – 1992. – Vol. 57, No. 7. – P. 902–915.
6. Сердюков А. С., Протасов М. И. Двухточечное трассирование лучей на основе решения уравнения эйконала // Геофизика. – 2012. – № 3. – С. 13–18.
7. Rickett J., Fomel S. A second-order fast marching eikonal solver // Stanford Exploration Project, Report 100. – 1999. – P. 287–293.
8. Главная страница Madagascar – программного пакета с открытым исходным кодом для многомерного анализа данных и воспроизводимых вычислительных экспериментов [Электронный ресурс]. – URL: https://ahay.org/wiki/Main_Page (дата обращения: 27.04.2026).

© А. Д. Штейн, М. И. Протасов, 2026