

Е. Б. Сибиряков^{1,2}✉

Новый метод решения задачи Лэмба и возможности его использования в геофизике

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

²Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В работе предложен относительно простой полуаналитический способ нахождения решения задачи Лэмба для двухмерного полупространства. Показано, что используя разложение нагрузки в виде интеграла Фурье и решение уравнения Клейна-Городона, можно получить относительно простую альтернативу методу Каньяра-деХупа. Изложенный алгоритм может использоваться для решения динамических обратных задач, особенно в дифракционной области, а также решения задач малоглубинной сейсморазведки. В дальнейшем этот метод можно использовать для нахождения решения динамической задачи трёхмерной упругости для системы плоских слоёв на полупространстве.

Ключевые слова: краевые задачи, уравнение Клейна-Городона, задача Лэмба, коэффициентные обратные задачи, дифракция

E. B. Sibiriakov^{1,2}✉

A new method for solving the Lamb problem and the possibilities of its use in geophysics

¹IPGG SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

²SibSUTIS, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Abstract. A simple semi-analytical method for finding a solution to the Lamb problem for a two-dimensional half-space is proposed. It is shown that by using a Fourier integral decomposition of the traction vector and a solution to the Klein-Gordon equation, a simple alternative to the Cagniard-deHoop method can be obtained. The presented algorithm can be used to solve dynamic inverse problems, especially in the diffraction domain. This method can further be used to find a solution to a dynamic three-dimensional elasticity problem for a system of plane layers in a half-space.

Keywords: boundary value problems, Klein-Gordon equation, Lamb problem, coefficient inverse problems, diffraction

Введение

Нахождение решений динамических упругих волновых задач имеет значение как для геофизики, так и для акустики. В частности, потому, что решения прямых задач используются для нахождения решений коэффициентных обратных задач, конечной целью которых является восстановление свойств среды, включая геометрию отражающих границ раздела. Теория упругости находит взаимосвязь

между нагрузкой, прикладываемой к поверхности (удельная сила) и откликом на эту нагрузку (вектор перемещений). При этом обычно предполагается, что источником поля является импульсный источник, приложенный к верхней свободной поверхности, а коэффициентная обратная задача в классической постановке является некорректной [1].

Различные методы использования лучевого приближения (например AVO - Amplitude Versus Offset), имеют ограничения связанные с длиной волны, так и с тем, что амплитуда отражённого от границы раздела сигнала неизвестна [2]. Идея нахождения свойств упругой среды с использованием результатов измерений как вектора нагрузки, так и вектора перемещений была реализована в [3] с используя обобщённого принципа взаимности. Идея не получила широкого применения, как по причине сложности алгоритма, так и трудностей независимого измерения нагрузок, приложенных к внешней поверхности.

В случае уменьшения длины волны учёт дифракционных эффектов может использоваться как в задачах малоглубинной сейсморазведки [4], так и для вычисления временных сдвигов для вычисления кинематической поправки. В [5] показано, что кинематические свойства отражённых волн отличаются от отражённых и могут быть отфильтрованы в процессе обработки. Однако, классическое дифракционное суммирование (без весовых коэффициентов) приводит к появлению ложных границ. Там же упоминается про попытку решения обратной динамической задачи методом обращения полных волновых полей. Казалось бы, что хотя бы в случае плоских границ раздела для этого можно использовать точные решения динамической теории упругости, например, аналог задачи Лэмба, включающий несколько плоских границ раздела. В этом случае нахождение полного волнового поля сведётся к вычислению интегралов. Однако, полные волновые поля, как правило, вычисляются с помощью метода конечных элементов, либо конечных разностей и требует использования регуляризационных процедур.

В настоящий момент считается, что задача Лэмба решена давно. Как будет показано ниже, в случае достаточно малых временных частот, можно достаточно просто разделить переменные, используя либо представление в виде двойного ряда Фурье, либо в виде интеграла. Однако, в случае высоких частот, экспонента становится комплексной, как и знаменатель Рэлея. Уравнению и граничным условиям удовлетворяет как мнимая, так и вещественная части. Это приводит к тому, что задача становится недоопределённой. Соответственно, просто разделить переменные уже нельзя. Нужно обращать преобразование Лапласа (либо Фурье), что является нетривиальной задачей в двухмерном случае и очень сложной в трёхмерном. В [6] отмечено, что что обратить полученные интегральные представления оказалось весьма непросто. В случае произвольной зависимости от времени замкнутое решение было получено в пространстве изображений, точнее, решение на поверхности было представлено в виде несобственного интеграла от некоторой алгебраической функции. Главная трудность в вычислении этого интеграла в том, чтобы правильно построить контур интегрирования, используя метод Каньяра-деХупа (Cagniard-DeHoop), изложенный в [7]. В этом

случае получаются очень громоздкие решения. Альтернатива, упомянутая в [6] – использование многократного изменения порядка интегрирования совместно с функционально-инвариантными решениями Смирнова – Соболева. Там же упомянуто о возникновении на поверхности не только волн Рэлея, но также продольных и поперечных волн. Таким образом, эти достаточно сложные решения не позволяют обобщить существующий метод решения задачи Рэлея на случай слоя на полупространстве. Если найти альтернативу этим сложным методам решения, то это откроет возможность найти полуаналитическое решение для плоского слоя на полупространстве. В случае криволинейной границы раздела эти решения можно будет использовать в качестве ядер, аналогично [8].

Задача Лэмба

Уравнений динамической теории упругости имеют вид:

$$\mu \Delta U_i + (\lambda + \mu) \text{grad}_i(\text{div} \mathbf{U}) = \rho U_{i,tt} \quad (1)$$

где λ, μ – упругие модули, ρ – плотность, U_i – компоненты вектора перемещений, порождённого нормальной нагрузкой на плоской свободной поверхности. Граничные условия на поверхности – нулевая касательная нагрузка ($\sigma_{12}(0, x, t) = 0$) и нормальная нагрузка с достаточно широким единичным спектром, которую можно представить в виде интеграла Фурье. Будем искать аналитическое решение в виде двух функций (в трёхмерном случае их будет три), аналогично [9]. Эти функции выбираются так, чтобы каждая из них удовлетворяла системе уравнений (1), а их сумма – условиям на границе полупространства:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varphi_{zz}^p \\ \varphi_{zx}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\varphi_{xx}^s \\ \varphi_{zx}^s \end{bmatrix} \quad (2)$$

Нижние индексы – частные производные по координатам z (вертикальная) и x – горизонтальная. Граница полупространства ($z = 0$). Для того, чтобы удовлетворять системе (1) эти функции должны удовлетворять волновым уравнениям:

$$\Delta \varphi^s = \frac{1}{C_s^2} \varphi_{tt}^s \quad (3)$$

$$\Delta \varphi^p = \frac{1}{C_p^2} \varphi_{tt}^p \quad (4)$$

при этом есть $C_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $C_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$ – объёмные скорости волн. Перемещения вызваны нагрузкой. Нормальную компоненту вектора нагрузки, не уменьшая общности, будем считать дважды чётной, и обладающей единичным спектром в достаточно широком диапазоне частот. Её можно задать на поверхности в виде интеграла:

$$p_1 = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \hat{p}_{1ee}(k_x, \omega) \cos(t\omega) \cos(k_x x) dk_x \quad (5)$$

Если представить эти функции в виде разложения Фурье по координате, то получим уравнения Клейна-Гордона. Например, (4) даёт следующее уравнение:

$$\hat{\phi}_{zz}^p - \frac{1}{C_p^2} \hat{\phi}_{tt}^p - j^2 \hat{\phi}^p = 0 \quad (6)$$

Это уравнение имеет характеристики:

$$\xi = t - \frac{z}{C_p}; \eta = t + \frac{z}{C_p} \quad (7)$$

В характеристических переменных (7) уравнение (6) имеет вид:

$$\frac{\hat{\phi}_{\xi\eta}^p}{\hat{\phi}^p} = -\frac{k_x^2 C_p^2}{4} \quad (8)$$

Ищем решение в виде, допускающим разложение в ряд Фурье или представление в виде интеграла:

$$\hat{\phi}^p = e^{i\frac{k_x C_p}{2}(\alpha\xi + \beta\eta)} \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) даёт соотношение параметров: $\alpha\beta = 1$, следовательно

$$\hat{\phi}^p(z, k_x, t) = e^{i\frac{k_x C_p}{2}(\alpha\xi + \frac{\eta}{\alpha})} \quad (10)$$

Если $z = 0$, то $\xi = \eta = t$. Это даёт возможность вычислить параметр α .

$$\begin{aligned} & \frac{k_x C_p}{2\alpha} \\ &= \frac{\omega \mp \sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Это означает, что (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^p(z, k_x, t) = & A \cos\left(\frac{1}{2}\left(\xi\omega \pm \xi\sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) + \eta\omega \mp \eta\sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) \\ & + B \sin\left(\frac{1}{2}\left(\xi\omega \pm \xi\sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) + \eta\omega \mp \eta\sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

В результате мы получаем связь между временем и вертикальной переменной. При этом знак «минус» соответствует волне, отражённой от нижнего слоя. Таким образом, для полупространства получается следующая зависимость. Если $\omega > k_x C_p$, то

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^p(z, k_x, t) = \\ = A \cos\left(t\omega - \frac{z}{C_p} \sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) \\ + B \sin\left(t\omega - \frac{z}{C_p} \sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right); \omega > k_x C_p\end{aligned}\quad (13)$$

Для другой частотной области ($\omega < k_x C_p$) получается классическая экспонента:

$$\hat{\phi}^p(z, x, t) = \exp\left(-\frac{z}{C_p} \sqrt{\omega^2 - (k_x C_p)^2}\right) (A \cos(t\omega) + B \sin(t\omega)) \quad (14)$$

Введём обозначения: $v_p = \sqrt{|\omega^2 - (k_x C_p)^2|}$; $v_s = \sqrt{|\omega^2 - (k_x C_s)^2|}$; $k^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2}$

Теперь в этих же обозначениях можем вычислить нагрузки, используя (2) и связать нагрузки с перемещениями, то есть решить задачу.

$$\frac{\hat{\sigma}_{11}}{2\mu} = \left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right) \hat{\phi}_z^p + k_x^2 \hat{\phi}_z^s \quad (15)$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{12}}{2\mu} = \hat{\phi}_x^p (k_x^2 - \gamma^2 k^2) + \hat{\phi}_x^s \left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right) \quad (16)$$

Перемещения с этими же функциями связаны следующим образом:

$$\hat{U}_1 = -\frac{\hat{\sigma}_{12}}{2\mu k_x} + \frac{k^2}{2} \hat{\phi}^s \quad (17)$$

$$\hat{U}_2 = -\frac{\hat{\sigma}_{11}}{2\mu k_x} - \frac{k^2 \hat{\phi}_z^p}{2k_x} \quad (18)$$

Можно отметить три интересных момента. Первые слагаемые в (17-18) – не волновые. На свободной поверхности они представляют из себя не что иное, как первообразные от соответствующих нагрузок. Они несут никакой информации о внутренней структуре среды. И будут одинаковыми при любой внутренней геометрии структур. Поэтому при изучении волновых явлений эти слагаемые желательно просто вычесть из данных измерений. Второе. Несмотря на свою кажущуюся бесполезность, эти слагаемые могут быть выделены и использованы для

вычисления эффективной нагрузки. Третье. В плоскопараллельной среде напряжённое состояние таково, что нормальные компоненты напряжений много больше касательных. Это значит, что при скачкообразном уменьшении модуля сдвига выделившаяся энергия будет расходоваться прежде всего на осуществление касательных перемещений вдоль границы раздела. Получится что-то похожее на дипольный сдвиг. Это может быть использовано для объяснения механизмов возникновения землетрясений.

Теперь задача сводится к решению системы уравнений, которые будут разными в разных областях временных частот. Приведём решения для нормальной компоненты вектора перемещений на свободной поверхности. В области $\omega < k_x C_s$ решение следующее:

$$\left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 - k_x^2 \frac{v_s}{C_s} \frac{v_p}{C_p} = Ra \quad (19)$$

$$U_1 = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{\hat{p}_{1ee}(k_x, \omega) \frac{v_p}{C_p}}{Ra} \cos(t\omega) \cos(k_x x) dk_x \quad (20)$$

В случае $k_x C_p > \omega > k_x C_s$ решение имеет следующий вид:

$$\left(\left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right)^4 + k_x^4 \frac{v_s^2}{C_s^2} \frac{v_p^2}{C_p^2}\right) = Ra_2 \quad (21)$$

$$U_1 = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{\hat{p}_{1ee}(k_x, \omega) \frac{v_p}{C_p} \left(\left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 \cos(t\omega) - k_x^2 \frac{v_s}{C_s} \frac{v_p}{C_p} \sin(t\omega)\right)}{Ra_2} \cos(k_x x) dk_x \quad (22)$$

В случае высоких временных частот $\omega > k_x C_p$ решение следующее:

$$\left(\left(k_x^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 + k_x^2 \frac{v_s}{C_s} \frac{v_p}{C_p}\right) = Ra_1 \quad (23)$$

$$U_1 = - \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{\hat{p}_{1ee}(k_x, \omega) \frac{v_p}{C_p}}{Ra_1} \sin(t\omega) \cos(k_x x) dk_x \quad (24)$$

Результаты вычислений

Нормальная компонента нагрузки, заданная на свободной поверхности двумерного упругого полупространства с параметрами $\lambda = \mu = \rho$, являющаяся

конечным аналогом импульсной с частотами $\omega \in (0.01; 2\pi)$, $k_x \in (0.01; 2\pi)$ представлена на рисунке 1:

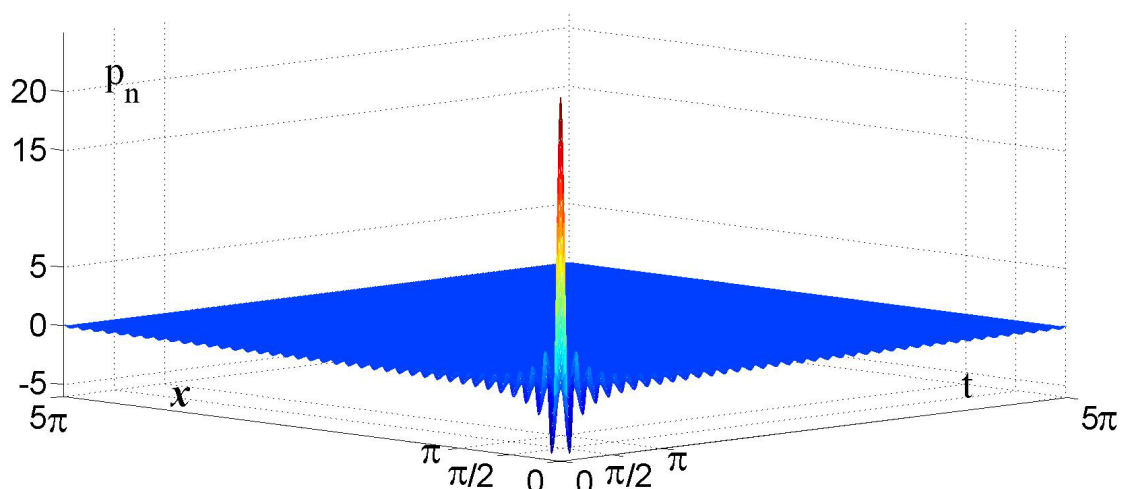


Рис. 1. Нормальная компонента вектора нагрузки, приложенная к свободной поверхности двумерного полупространства.

Поскольку большая часть энергии, приложенной к полупространству в результате действия нагрузки, перейдёт в энергию волн Рэлея, нормальную компоненту нагрузки имеет смысл представить в виде трёх рисунков, соответствующих суммированию в трёх частотных областях, $\omega < k_x C_s$, $k_x C_p > \omega > k_x C_s$, $\omega > k_x C_p$, для того, чтобы в области высоких частот увидеть волны с амплитудой, меньшей амплитуды волны Рэлея. На рисунке 2 представлена нормальная компонента вектора перемещений в первой частотной области.

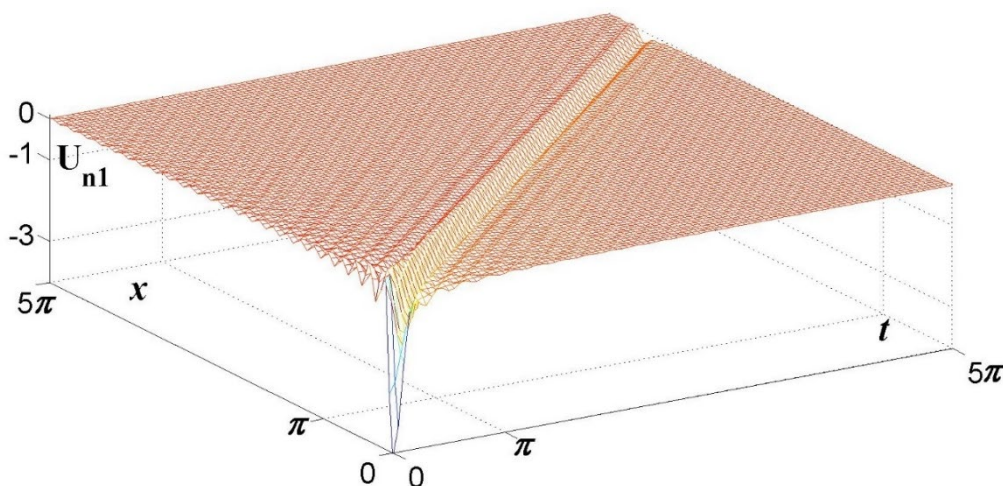


Рис. 2. Нормальная компонента вектора перемещений на свободной поверхности двумерного полупространства, полученная суммированием в диапазоне частот $\omega < k_x C_s$.

При этом на рисунке 2, отчётливо видна волна, бегущая со скоростью поверхностной волны Рэлея, являющаяся результатом вычисления интеграла (20). На рисунке 3 представлена та же компонента вектора вычисленная с помощью (22). На рисунке видны две волны, распространяющиеся со скоростями поперечной и продольной волн соответственно. Волны Рэлея в этом частотном диапазоне нет.

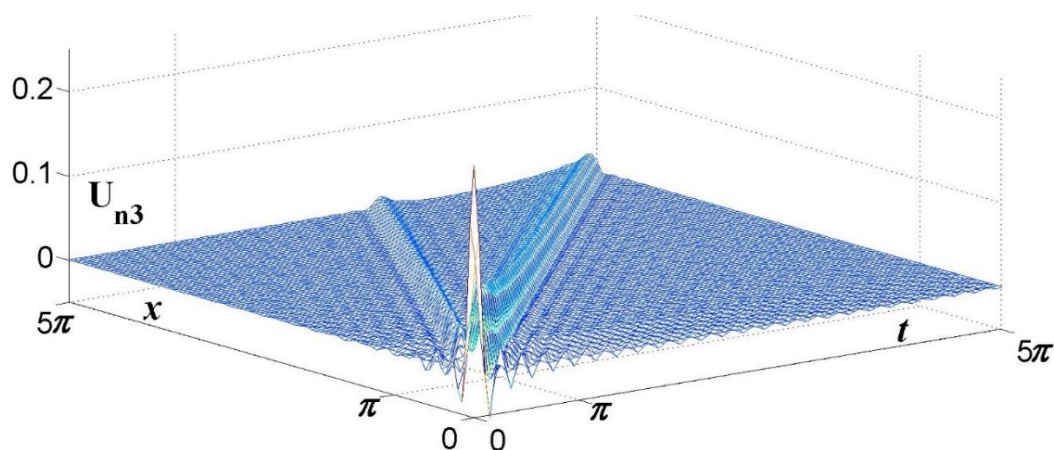


Рис. 3. Нормальная компонента вектора перемещений на свободной поверхности двумерного полупространства, полученная суммированием в диапазоне частот $k_x C_p > \omega > k_x C_s$.

На рисунке 4 представлена та же компонента вектора вычисленная по формуле (24). На рисунке видны только малоамплитудная волна, распространяющаяся со скоростью продольной волны. В этом частотном диапазоне на поверхности нет ни поперечных волн ни волн Рэлея.

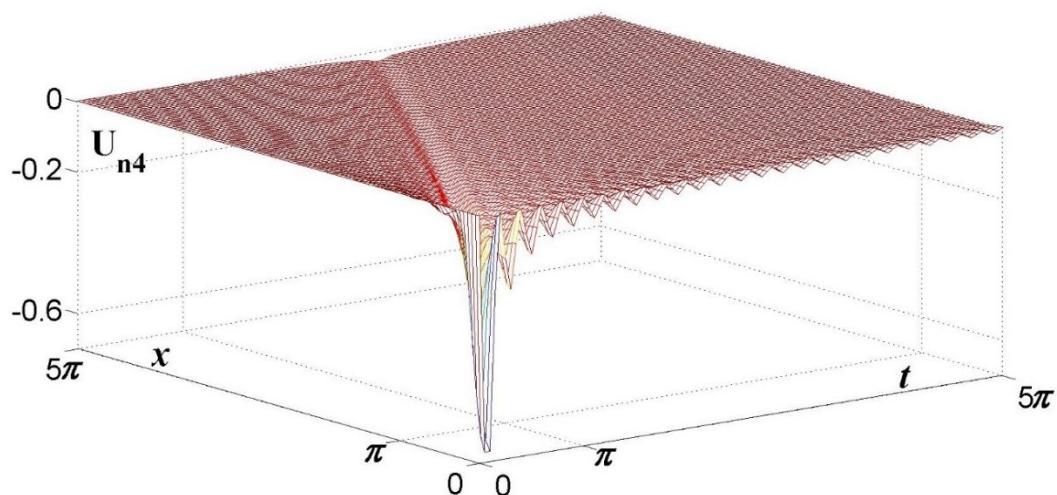


Рис. 4. Нормальная компонента вектора перемещений на свободной поверхности двумерного полупространства, полученная суммированием в диапазоне частот $k_x C_p < \omega$.

Полное поле перемещений будет суммой перемещений, представленных на рисунках 2-4. По-видимому, для выделения и подавления различных типов волн имеет смысл разделять поле перемещений на три слагаемых, полученных суммированием в упомянутых выше частотных областях.

Заключение

В работе предложен относительно простой полуаналитический способ нахождения решения задачи Лэмба для двухмерного полупространства. Показано, что используя представление вектора нагрузки в виде интеграла Фурье и решение уравнения Клейна-Городона, можно получить относительно простую альтернативу методу Каньяра-деХупа, подробное изложение использования которого для двухмерного случая изложено в [10]. В [6] показано, что результатом аналитического решения задачи Лэмба будет появление на поверхности являющиеся волн Рэлея, а также продольных и поперечных волн. В данной работе этот факт подтверждается. Волн с иными скоростями на поверхности полупространства не обнаружено. Однако, показано также, что поле перемещений можно разбить на три слагаемых путём разбиения временной области интегрирования на три части, суммирования по которым дают разные типы волн. Следовательно, можно выбрать частотную область, где будет волна только одного типа. Формулы, получаемые в результате классического аналитического решения задачи Лэмба являются очень громоздкими даже в двухмерном случае. По этой причине получить решение задачи для слоя на полупространстве представляет собой отдельную проблему. Предложенный в работе алгоритм даёт возможность получить в достаточно простом виде аналитическое решение в спектральной области, что сводит задачу к вычислению двухмерных сингулярных интегралов от вещественных функций с одной интегрируемой особенностью. Поэтому предложенный в работе алгоритм может быть использован для получения решения для слоя на полупространстве, в том числе и в трёхмерном случае, что может использоваться для решения динамических обратных задач, особенно в дифракционной области, а также задач малоглубинной сейсморазведки.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИНГГ СО РАН, при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWZZ-2026-0050).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009, 457 с.
2. Разин А.В., Меркулов В.П., Чернов С.А. Применение геофизики при изучении месторождений нефти и газа. Томск: Центр профессиональной переподготовки специалистов нефтегазового дела. ТПУ, 204. – 332 с.
3. Ватульян А.О., Гукасян Л.С., Недин Р.Д. // О задачи Коши в теории коэффициентных обратных задач для упругих тел // Владикавказский математический журнал. – 2016, Т.18, Выпуск 2, С. 31-40.

4. Удоратин В. В., Магомедова А. Ш., Езимова Ю. Е., Зелионко А. В. Применение малоглубинной сейсморазведки на объектах Среднего Тимана // Вестник геонаук. 2025. 11(371). С. 33—41. DOI: 10.19110/geov.2025.11.4
5. Е.И. Ланда. Роль дифракционной компоненты волнового поля при построении сейсмических изображений // Технологии сейсморазведки, № 1, 2013, с. 5–31
6. С. В. Кузнецов, Е. О. Терентьева. Плоская внутренняя задача Лэмба. Волны в эпицентральной зоне от вертикального силового источника // Акустический журнал. 2015, Т. 61, № 3. с. 387-399.
7. Kazumi Watanabe. Integral Transform Techniques for Green's Function // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Volume 71, Springer International Publishing Switzerland January 2014, DOI: 10.1007/978-3-319-00879-0, ISBN: 978-3-319-00878-3
8. Сибиряков Е.Б. Использование метода граничных элементов с гладкими ядрами для решения граничных задач упругих стационарных колебаний. Интерэкспо ГЕО-Сибирь - XIX Международный научный конгресс. Международная научная конференция "Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Экономика. Геоэкология": Сборник материалов в 8 т. (г. Новосибирск, 17-19 мая 2023 г.) – СГУГиТ – Новосибирск – том Т. 2 – № 3 – С. 276-284 – 2023
9. Е.Б. Сибиряков. О детектировании шероховатых границ. Физическая мезомеханика, Т.20, №6, Томск, 2017, с.98-104
10. Д.В. Перегудов. Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра. Вычислительная сейсмология. Вып. 31, 2000., с.120-137.

© Е. Б. Сибиряков, 2026