

Д. В. Рыжков¹✉, К. Г. Гадильшин¹

Разработка теоретических основ метода волнового обращения времен: анализ регулярности и дифференцируемости оператора обратной динамической задачи сейсмики

¹Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: d.v.ryzhkov@math.nsc.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке теоретических основ метода волнового обращения времен – одного из перспективных подходов к решению обратной динамической задачи сейсмики, основанного на минимизации временных сдвигов между наблюдаемыми и модельными сейсмограммами. Проблема восстановления распределения скорости распространения волн в геологической среде по данным наземной регистрации относится к классу нелинейных некорректных задач и требует строгого математического обоснования применяемых итерационных алгоритмов. Целью исследования является установление свойств регулярности и дифференцируемости оператора, сопоставляющего параметрической модели среды вектор невязок времен первых вступлений. В качестве математической модели волновых процессов используется акустическое приближение, а временные сдвиги определяются через положение максимума взаимной корреляционной функции наблюдаемых и модельных сейсмотрасс. Доказана теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости по Фреше отображения временных невязок в окрестности опорной модели. Получена явная формула для производной этого отображения и выражение для градиента целевого функционала через сопряженный оператор. Результаты закладывают математический фундамент для построения строго обоснованных градиентных методов инверсии времен пробега и их эффективной численной реализации на основе решения сопряженных задач.

Ключевые слова: обратная динамическая задача сейсмики, инверсия времен пробега, дифференцируемость по Фреше

D. V. Ryzhkov¹✉, K. G. Gadylishin¹

Theoretical foundations of the wave-equation traveltime inversion: regularity and differentiability of the seismic inverse dynamic problem operator

¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: d.v.ryzhkov@math.nsc.ru

Abstract. The paper is devoted to the development of the theoretical foundations of the wave-equation traveltime inversion method – one of the promising approaches to solving inverse dynamic problem of seismics, based on minimizing time shifts between observed and modeled seismograms. The problem of recovering the wave velocity distribution in a geological medium from surface registration data belongs to the class of nonlinear ill-posed problems and requires a rigorous mathematical justification of the applied iterative algorithms. The aim of the study is to establish the regularity and differentiability properties of the operator that maps a parametric model of the medium to the vector of first-arrival time residuals. The acoustic approximation is used as the mathematical model of wave

processes, and the time shifts are determined through the position of the maximum of the cross-correlation function of observed and modeled seismic traces. The theorem on the existence, continuity, and Fréchet differentiability of the time-shift mapping in the vicinity of a reference model is proved. An explicit formula for the derivative of this mapping and an expression for the gradient of the objective functional in terms of the adjoint operator are obtained. The results lay a mathematical foundation for the construction of rigorously justified gradient methods of traveltimes inversion and for their efficient numerical implementation based on solving adjoint problems.

Keywords: inverse dynamic problem of seismics, traveltimes inversion, Fréchet differentiability

Введение

В современных задачах сейсморазведки существенное значение приобретает построение высокоразрешающих глубинно-скоростных моделей геологической среды, обеспечивающих адекватную интерпретацию наблюдаемых данных. Одним из наиболее эффективных подходов к решению данной задачи является метод обращения полного волнового поля (Full Waveform Inversion, FWI), позволяющий восстанавливать параметры среды с разрешением порядка длины волны.

Математически задача FWI формулируется как нелинейная задача минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и синтетическими данными, как правило, в норме L_2 [1, 2]. В силу высокой размерности параметрического пространства, особенно в трёхмерных постановках, решение данной задачи осуществляется с использованием локальных методов оптимизации градиентного или ньютоновского типа. При этом существенным ограничением является сложная структура целевого функционала, характеризующаяся выраженной мульти-модальностью, что приводит к высокой вероятности сходимости итерационного процесса к локальным минимумам и, как следствие, к получению некорректных решений.

В условиях недостаточности низкочастотной информации и низкого отношения сигнал/шум более устойчивые результаты демонстрируют методы, основанные на использовании кинематических характеристик волнового поля. К их числу относится метод волнового обращения времен (Wave-equation Traveltime Inversion, WTI) [3], являющийся развитием подхода, предложенного в работе [4]. В рамках данного метода минимизируется функционал, основанный на рассогласовании времен пробега волн, определяемом посредством кросс-корреляции наблюдаемых и расчетных волновых полей. Численная реализация WTI близка к классической схеме FWI, однако в процедуре обратного распространения используются временные невязки, что обеспечивает большую устойчивость алгоритма. В отличие от лучевых методов, WTI основан на решении полного волнового уравнения и, следовательно, учитывает волновые эффекты, включая дифракцию и интерференцию, что обеспечивает физическую состоятельность получаемых скоростных моделей.

Настоящая работа посвящена разработке теоретических основ метода волнового обращения времен и включает анализ регулярности и дифференцируемости оператора обратной динамической задачи сейсмологии.

Теория и метод

В качестве математической модели распространения сейсмических волн в работе используется акустическое приближение, в рамках которого среда характеризуется единственным скалярным параметром – скоростью распространения продольных волн $c(x)$. Это приближение позволяет описать волновое поле u^{mod} как решение начально-краевой задачи для классического волнового уравнения. Рассматриваемая прямая задача заключается в моделировании процесса генерации и регистрации сейсмических сигналов в ограниченной пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на временном интервале $[0, T]$. Математически она ставится следующим образом:

$$\begin{cases} m(x) \cdot u_{tt}^{mod}(x, t; x_s) - \Delta u^{mod}(x, t; x_s) = s(x, t; x_s), & x \in \Omega, t \in [0, T], \\ u^{mod}(x, 0; x_s) = u_t^{mod}(x, 0; x_s) = 0, \\ u^{mod}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Здесь $m(x) = c^{-2}(x) \in C_+^2(\Omega)$ представляет собой квадрат медленности – ключевую физическую характеристику среды, подлежащую восстановлению. Предполагается, что $m(x)$ есть строго положительная и дважды непрерывно дифференцируемая функция в области Ω , то есть $c(x) > 0$. Правая часть уравнения $s(x, t; x_s) \in W_2^2(\Omega \times [0, T])$ описывает источник возмущения, локализованный в точке x_s . Граница области $\partial\Omega$ предполагается принадлежащей классу C^4 , однако данное условие может быть снято, если Ω является параллелепипедом, что типично для многих вычислительных задач. При указанных условиях на коэффициенты и данные задачи решение $u^{mod}(x, t, x_s) \in W_2^2(\Omega \times [0, T])$ существует и единственно. Строгое доказательство этого факта опирается на классические результаты теории смешанных задач для гиперболических уравнений и может быть найдено, например, в [5].

Для формализации процесса восстановления свойств среды введем два функциональных пространства. Пространство моделей M определим как множество допустимых параметров среды: $M = C_+^2(\Omega)$. Пространство данных D определим как множество всех возможных сейсмограмм, зарегистрированных в N_r точках приема x_r , то есть $D = (C([0, T]))^{N_r}$. Это пространство наделяется структурой гильбертова пространства со скалярным произведением, которое для любых двух наборов трасс $u_1, u_2 \in D$ задается как

$$(u_1, u_2)_D = \sum_{r=1}^{N_r} \int_0^T u_1(x_r, t) \cdot u_2(x_r, t) dt.$$

Соответственно, пространство моделей M также снабжается скалярным произведением, индуцированным нормой пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$: $(m_1, m_2)_M =$

$(m_1, m_2)_{W_2^2(\Omega)}$. Данный выбор топологий обеспечивает корректность анализа гладкости вводимых далее операторов.

Ключевым элементом математической постановки является оператор прямой задачи $\mathcal{F}$, который каждой модели среды $m(x) \in M$ ставит в соответствие смоделированные данные наблюдений – значения волнового поля в точках расположения приемников x_r :

$$\mathcal{F}: M \rightarrow D, \quad \mathcal{F}m = u^{mod}(x_r, t).$$

Таким образом, $\mathcal{F}$ представляет собой композицию решения начально-краевой задачи и оператора взятия следа на множестве точек. Фундаментальным свойством этого оператора, лежащим в основе всех градиентных методов решения обратной задачи, является его дифференцируемость по Фреше. Это свойство установлено и строго обосновано в работе [6].

Основная цель обратной динамической задачи сейсмологии формулируется как восстановление неизвестного распределения квадрата медленности $m(x) \in M$ по набору зарегистрированных сейсмограмм $u^{obs}(x_r, t)$, которые будем считать элементами подпространства более гладких функций $(C^2([0, T]))^{N_r} \subset D$. Классический подход к решению этой нелинейной некорректной задачи состоит в построении итерационной процедуры уточнения модели, на каждом шаге которой минимизируется некоторый функционал невязки между модельными данными $u^{obs}(x_r, t)$ и наблюдениями u^{obs} .

В настоящей работе в качестве такого функционала используется мера, основанная на разности времен первых вступлений, вычисляемых через взаимную корреляцию волновых форм. Такой подход известен как метод инверсии времен пробега, основанный на волновом уравнении (wave-equation traveltimes inversion [??]). Его идея заключается в переходе от сравнения амплитуд сигналов к сравнению кинематических характеристик, что делает функционал невязки более устойчивым к высокочастотным шумам. Формально метод ищет искомую модель $\tilde{m}(x)$ как решение задачи минимизации:

$$\tilde{m}(x) = \arg \min_{m \in M} J(m) = \arg \min_{m \in M} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N_r} (\Delta\tau(x_r))^2 \right),$$

где для каждого приемника x_r временной сдвиг $\Delta\tau(x_r)$ между наблюдаемой и модельной трассами определяется как положение максимума функции их кросс-корреляции:

$$\Delta\tau(x_r) = \operatorname{argmax}_{-T \leq \tau \leq T} \int_0^T u^{mod}(x_r, t) \cdot u^{obs}(x_r, t + \tau) dt.$$

В этом определении предполагается, что наблюдаемая трасса $u^{obs}(x_r, t)$ определена нулем вне временного окна регистрации $[0, T]$, что позволяет вычислить интеграл для любого сдвига τ из указанного диапазона. Для корректности данного определения необходимо гарантировать существование и единственность максимума. В этой связи важным является следующее утверждение, обосновывающее корректность определения.

Утверждение. Интеграл, задающий взаимную корреляционную функцию наблюдаемой и смоделированной сейсмотрасс, является непрерывной функцией аргумента сдвига τ на отрезке $[-T, T]$ для любых фиксированных модельной $u^{mod} \in C([0, T])$ и наблюдаемой $u^{obs} \in C([0, T])$ трасс.

Из данного утверждения непосредственно следует, что функция взаимной корреляции достигает своего максимума на компактном множестве $[-T, T]$, что делает определение невязки $\Delta\tau(x_r)$ математически строгим. Единственность максимума, требуемая для однозначности определения сдвига, предполагается как характеристика данных и на практике достигается при надлежащем выборе частотного диапазона и временного окна.

Результаты

Центральным теоретическим результатом работы является установление свойств регулярности и дифференцируемости нелинейного оператора, сопоставляющего модели среды $m(x)$ вектор временных невязок $\Delta\tau$. В отличие от анализа метода наименьших квадратов, где дифференцируемость оператора невязки напрямую наследуется от дифференцируемости оператора прямой задачи $\mathcal{F}$, здесь требуется более тонкий анализ, включающий применение теоремы о неявной функции к условию максимума взаимной корреляции. Основным итогом этого анализа формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $m_0 \in M$ – некоторая опорная модель среды. Тогда существует отображение $\mathcal{T}: U \rightarrow \mathbb{R}^{N_r}$, определенное в некоторой окрестности U точки m_0 и ставящее в соответствие каждой модели $m \in U$ вектор временных сдвигов $\Delta\tau$, то есть

$$\mathcal{T}(m) = \Delta\tau.$$

Это отображение является непрерывным в указанной окрестности. Более того, отображение $\mathcal{T}$ дифференцируемо по Фреше в точке m_0 . Его производная в этой точке дается выражением

$$\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta m}(m_0)\delta m = - \frac{\int_0^T \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta m}(m_0)\delta m \cdot \frac{\partial u^{obs}}{\partial t}(x_r, t + \Delta\tau_0)dt}{\int_0^T \mathcal{F}(m_0) \frac{\partial^2 u^{obs}}{\partial t^2}(x_r, t + \Delta\tau_0)dt}.$$

Доказательство данной теоремы опирается на обобщение классической теоремы о неявной функции на случай отображений в банаховых пространствах [7]. В рамках проведенного исследования было показано, что при наложенных ограничениях на гладкость модели среды и источника вектор-функция условий стационарности

$$F(m, \tau) = \int_0^T \mathcal{F}(m) \cdot \frac{\partial u^{obs}}{\partial t}(x_r, t + \tau) dt$$

является непрерывно дифференцируемой по обеим переменным в окрестности точки $(m_0, \Delta\tau_0)$. Существенным моментом доказательства выступает проверка невырожденности оператора частной производной $F'_\tau(m_0, \Delta\tau_0)$, гарантирующая его обратимость. Условие невырожденности глобального максимума взаимной корреляционной функции для опорной модели m_0 как раз и обеспечивает выполнение этого требования, поскольку вторая производная кросскорреляционного функционала в точке максимума строго отрицательна. При выполнении указанных условий теорема о неявной функции гарантирует существование, единственность, непрерывность и дифференцируемость по Фреше неявно заданного отображения $\mathcal{T}$ в некоторой окрестности точки m_0 .

Доказанная теорема не только обосновывает корректность использования методов градиентного типа для минимизации функционала $J(m)$, но и предоставляет явную формулу для производной отображения $\mathcal{T}$, выраженную через производные операторов, зависящих от решения прямой задачи.

Для удобства анализа функционала обратной задачи введем в рассмотрение конечномерное пространство невязок $Q = \mathbb{R}^{N_r}$ со стандартным евклидовым скалярным произведением:

$$(\tau_1, \tau_2)_Q = \sum_{r=1}^{N_r} \tau_1(x_r) \cdot \tau_2(x_r).$$

В этих обозначениях целевой функционал $J(m)$, определенный как половина суммы квадратов временных невязок, может быть записан как квадрат нормы в пространстве Q :

$$J(m) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N_r} (\Delta\tau(x_r))^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{T}(m), \mathcal{T}(m))_Q = \frac{1}{2} \|\mathcal{T}(m)\|_Q^2.$$

Используя доказанную дифференцируемость отображения $\mathcal{T}$ и правило дифференцирования сложной функции, для производной Фреше функционала J в точке m_0 получаем выражение, связывающее ее с производной самого отображения $\mathcal{T}$:

$$\frac{\partial J}{\partial m}(m_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial m}(m_0) \right)^* \mathcal{T}(m_0).$$

Здесь $\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial m}(m_0) \right)^*$ обозначает оператор, сопряженный к производной Фреше отображения $\mathcal{T}$ в точке m_0 , действующий из пространства невязок Q в сопряженное к M пространство. Эта формула является отправной точкой для построения эффективных вычислительных алгоритмов.

Заключение

В рамках настоящей работы разработаны теоретические основы метода волнового обращения времен, составляющего перспективный класс алгоритмов решения обратных динамических задач сейсмологии. Центральное место в исследовании занял анализ оператора $\mathcal{T}$, ставящего в соответствие распределению квадрата медленности в среде вектор временных сдвигов между наблюдаемыми и модельными сейсмограммами. Показано, что данный оператор определен, непрерывен в окрестности опорной модели и является дифференцируемым по Фреше.

Представленные результаты закладывают строгий математический фундамент для обоснования итерационных процедур минимизации функционала невязки времен первых вступлений. В частности, установленная дифференцируемость оператора невязки позволяет перейти к построению градиентных методов, обладающих гарантированной сходимостью в окрестности точного решения. Полученная формула для градиента целевого функционала как результата действия сопряженного оператора на вектор невязок открывает прямой путь к организации вычислительного процесса на основе решения сопряженных задач для волнового уравнения. Это делает возможным масштабирование метода на реалистичные трехмерные постановки, где явное построение и хранение матрицы производных Фреше практически неосуществимо.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИМ СО РАН (тема FWNF-2026-0018).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tarantola A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // *Geophysics*. – 1984. – vol. 49, №8, p. 1259–1266. – doi: 10.1190/1.1441754
2. Virieux J., Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // *Geophysics*. – 2009. – vol. 74, №6, p. WCC1–WCC26. – doi: 10.1190/1.3238367

3. Liu L., Duan X., Luo Y. Three-dimensional data-domain full travelttime inversion using a practical workflow of early arrival selection // *Geophysics*. – 2020. – vol. 85, №4, p. U77–U86. – doi: 10.1190/geo2019-0476.1
4. Luo Y., Schuster G. T. Wave-equation travelttime inversion // *Geophysics*. – 1991. – vol. 56, №5, p. 645–653. – doi: 10.1190/1.1443081
5. Ладыженская, О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М. : Гос. изд-во тех.-теорет. лит. (ГИТТЛ), 1953. – 280 с.
6. Natterer F. and Sielschott H. and Dorn O. and Dierkes T. and Palamodov V. Fréchet Derivatives for Some Bilinear Inverse Problems // *SIAM J. Appl. Math.* – 2002. – vol. 62, №6, p. 2092–2113. – doi: 10.1137/S0036139901386375
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М. : Физматлит, 2009. – 572 с.

© Д. В. Рыжков, К. Г. Гадильшин, 2026