

В. С. Захаров¹✉

Коэффициенты отражения плоской волны от пористого трехфазного слоя

¹Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН), г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: v.zakharov1@g.nsu.ru

Аннотация. В связи с активным освоением северных территорий необходимы разработка и совершенствование методов локализации многолетнемерзлых пород и изучение процесса растепления. Наиболее перспективным подходом для решения этой задачи является сейсмический мониторинг. Данный подход требует использования математической модели, учитывающей изменение фазового состояния среды. В качестве такой модели выбрана симметрическая гиперболическая термодинамически согласованная модель (СГТС). Свойства сейсмических волн в многофазных средах существенно отличаются от упругих сред. Параметры фаз и их объемные доли влияют на поглощение волн, их скорости и возникновение волн Био. В работе рассматривается модель среды, состоящая из двух слоев: верхнего упругого и нижнего пористого. Искомые параметрами являются глубина верхнего слоя и параметры объемных долей фаз нижнего. Данные параметры возможно определить по характеру поведения волны, отраженной от границы между средами. Для этого в работе выведены формулы для коэффициентов отражения и прохождения волн между упругой и трехфазной пористой средой.

Ключевые слова: сейсмический мониторинг, многолетнемерзлые породы, симметрическая гиперболическая термодинамически согласованная модель, многофазные среды, пористые среды, коэффициент отражения

V. S. Zakharov¹✉

Plane wave reflection coefficients from a porous three-phase layer

¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (IM SB RAS), Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: v.zakharov1@g.nsu.ru

Abstract. Due to the active development of northern territories, it is necessary to develop and improve methods for locating permafrost rocks and studying the thawing process. The most promising approach to solving this problem is seismic monitoring. This approach requires the use of a mathematical model that accounts for changes in the phase state of the medium. The symmetric hyperbolic thermodynamically consistent (SHTC) model has been chosen for this purpose. The properties of seismic waves in multiphase media differ significantly from those in elastic media. Phase parameters and their volume fractions affect wave attenuation, wave velocities, and the occurrence of Biot waves. This study considers a medium model consisting of two layers: an upper elastic layer and a lower porous layer. The unknown parameters are the thickness of the upper layer and the volume fraction parameters of the phases in the lower layer. These parameters can be determined from the behavior of the wave reflected from the interface between the media. To this end, formulas for the reflection and transmission coefficients of waves between an elastic medium and a three-phase porous medium are derived.

Keywords: seismic monitoring, permafrost rocks, symmetric hyperbolic thermodynamically consistent model, multiphase media, porous media, reflection coefficient

Введение

Изучение характеристик многофазных сред необходимо при решении большого спектра задач, в частности при мониторинге процессов таяния льдов в зонах вечной мерзлоты. Данная задача актуальна в связи с активным освоением северных территорий. При изучении пористых сред необходимо учитывать влияние параметров фаз и их объемных долей на поглощение волн и скорость их распространения. Отдельной особенностью пористой среды является возникновение медленной продольной волны (волны Био).

Одной из проблем при изучении многофазных сред является выбор корректного математического описания. Для моделирования пористых сред часто используется модель Био [3]. Однако, данная модель неприменима в случае граничных значений пористости среды, равных нулю или единице, то есть, когда пористая среда переходит в упругую. Это особенно важно при решении задачи локализации многолетнемерзлых пород, так как ожидаемый коэффициент пористости как правило имеет небольшое значение относительно объемной доли скелета. В связи с этим в работе использовалась Симметрическая Гиперболическая Термодинамически Согласованная (СГТС) модель [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8], обладающая достаточной гибкостью для решения поставленных задач.

Возможный подход для решения обратной задачи – минимизация невязки, вычисляемой по данным профиля сейсмоприемников на свободной поверхности. Невязка представляет собой среднеквадратичное отклонение синтетических скоростей смещения, рассчитанных для истинных значений параметров, от натуральных скоростей смещения. При решении используется программа с использованием технологии CUDA для численного моделирования волнового поля в пористых трехфазных средах [2].

Поведение невязки относительно пористости и глубины активного слоя зависит от параметров фаз пористого слоя и параметров упругого слоя, что делает необходимым исследование зависимости коэффициентов отражения и прохождения волны на границе между упругой и пористой средой от параметров среды.

Таким образом, целью работы является исследование коэффициента отражения на границе между упругим и пористым слоями.

Методы и материалы

В качестве математической модели выбран вариант СГТС модели, представленный в [8]. Он предполагает малые линейные колебания, малые изменения температуры, мгновенную релаксацию фазовых давлений к общему значению, отсутствие релаксации касательных напряжений.

Распишем данную систему дифференциальных уравнений в двумерной Декартовой системе координат (x, z) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\
\rho_0 \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \Sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial W_x^1}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_3^0} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial W_z^1}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_3^0} \right) \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial W_x^2}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho_2^0} - \frac{1}{\rho_3^0} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial W_z^2}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho_2^0} - \frac{1}{\rho_3^0} \right) \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial P}{\partial t} + K \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + K_1' \left(\frac{\partial W_x^1}{\partial x} + \frac{\partial W_z^1}{\partial z} \right) + K_2' \left(\frac{\partial W_x^2}{\partial x} + \frac{\partial W_z^2}{\partial z} \right) = 0 \\
\frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial t} - \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \\
\frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial t} - \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = 0 \\
\frac{\partial \Sigma_{xz}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0
\end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь V_x, V_z – компоненты скорости смещения смеси, $W_x^1, W_x^2, W_z^1, W_z^2$ – компоненты фазовых относительных скоростей, P – давление, $\Sigma_{xx}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xz}$ – компоненты девиатора напряжений. Параметры среды выражаются через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ объемные доли фаз ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$), μ – модуль сдвига твердого скелета, K_1, K_2, K_3 – модули сжатия фаз, ρ_1, ρ_2, ρ_3 – плотности фаз. Тогда $\rho_0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3$, $K = (\alpha_1 / K_1 + \alpha_2 / K_2 + \alpha_3 / K_3)^{-1}$, $K_a' = (\alpha_a - c_a) K$, где $c_a = \alpha_a \rho_a / \rho_0$.

Далее будем рассматривать модель среды, изображенную на (рис. 1). Среда делится на два слоя: верхний упругий слой и нижний пористый. На свободной границе установлена полоса сейсмоприемников. Особенностью данной модели является малая глубина верхнего слоя.

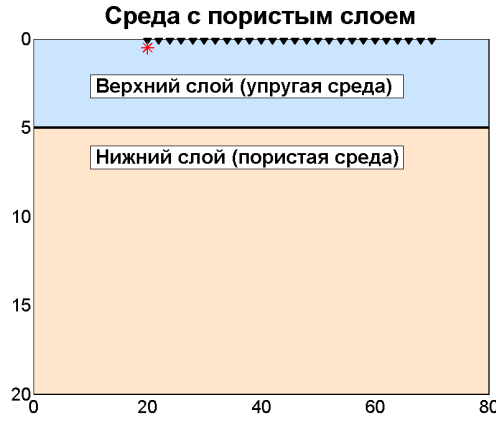


Рис. 1. Модель двухслойной среды с пористым слоем

Обратная задача заключается в определении глубины верхнего упругого слоя (активного слоя) и коэффициента пористости нижнего слоя. В качестве решения задачи предлагается точка глобального минимума невязки, имеющей вид

$$\Phi(\alpha, H) = \frac{\int \int_{T L} (u - u^*)^2 dt dl}{\int \int_{T L} u^{*2} dt dl}, \quad (2)$$

где α – пористость нижнего слоя, H – глубина активного слоя, u – вычисленная при α и H скорость смещения, u^* – истинная скорость смещения, T – временной отрезок, на котором моделировалось волновое поле, L – отрезок свободной поверхности, на котором регистрировались сейсмограммы. Минимум вычисляется при помощи алгоритма Нелдера-Мида.

Наибольшее влияние на поведение невязки оказывает отражение волн от границы между средами. В связи с этим необходимо определить коэффициент отражения между упругой и трехфазной средой, а также скорость распространения волн в трехфазной среде.

Для определения скоростей распространения волн в трехфазной среде рассмотрим решение в виде плоских гармонических волн $U(z, t) = U_0 e^{i\omega(t - z/c)}$,

где c – фазовая скорость волны, а $U = (V, W_1, W_2, P, \Sigma)^T$ – вектор переменных. Данное решение подставим в уравнения одномерной модели трехфазной среды. Отметим, что полное напряжение выражается как $\sigma = -P + \Sigma$.

После подстановки получим систему линейных уравнений, из которой:

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2\rho} \left(\rho A + K + \frac{4}{3}\mu \pm \sqrt{\left(\rho A + K + \frac{4}{3}\mu \right)^2 - \frac{16}{3}\rho\mu A} \right), \quad (3)$$

где $A = K_1' \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) + K_2' \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right)$. Знак плюс соответствует быстрой волне c_1 , а знак минус – медленной c_2 .

Пусть граница между средами располагается в точке $z = 0$. На границе между средами при закрытых порах выполняются условия $V^{(1)} = V^{(2)}$, $W_1^{(2)} = 0$, $W_2^{(2)} = 0$, $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$, где верхний индекс (1) соответствует упругому слою, а индекс (2) – пористому. Применим данную систему для волнового поля, включающего падающую Р-волну и отраженную Р-волну в упругом слое и проходящие быструю и медленную Р-волны в пористом. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + R &= T_1 + T_2, Z^{(1)}(1 - R) = Z_1^{(2)}T_1 + Z_2^{(2)}T_2, \\ \gamma_{11}^{(2)}T_1 + \gamma_{12}^{(2)}T_2 &= 0, \gamma_{21}^{(2)}T_1 + \gamma_{22}^{(2)}T_2 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где R - коэффициент отражения, T_1 и T_2 - коэффициенты прохождения быстрой и медленной волн, $Z^{(1)} = \rho^{(1)}c^{(1)}$ – импеданс упругой среды,

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{W_i^{(j)}}{V^{(j)}} = K \left(\frac{1}{\rho_i^{(2)}} - \frac{1}{\rho_3^{(2)}} \right) / \left(c_j^{(2)2} - A \right),$$

$$Z_j^{(2)} = \left(K^{(2)} + K_1'^{(2)}\gamma_{1j}^{(2)} + K_2'^{(2)}\gamma_{2j}^{(2)} + \frac{4\mu^{(2)}}{3c_j^{(2)}} \right) / c_j^{(2)}.$$

Таким образом, коэффициенты выражаются как:

$$R = \frac{Z^{(1)} - Z^{(2)}}{Z^{(1)} + Z^{(2)}}, \quad T_1 = \frac{2Z^{(1)}}{Z^{(1)} + Z^{(2)}} \frac{\gamma_{12}^{(2)}}{\gamma_{12}^{(2)} - \gamma_{11}^{(2)}}, \quad T_2 = \frac{2Z^{(1)}}{Z^{(1)} + Z^{(2)}} \frac{\gamma_{11}^{(2)}}{\gamma_{11}^{(2)} - \gamma_{12}^{(2)}},$$

где эффективный импеданс пористой среды выражается в виде:

$$Z^{(2)} = \left(Z_1^{(2)} - \left(\gamma_{11}^{(2)} / \gamma_{12}^{(2)} \right) Z_2^{(2)} \right) / \left(1 - \gamma_{11}^{(2)} / \gamma_{12}^{(2)} \right).$$

Аналогично получим коэффициенты для случая наклонного падения. Рассмотрим условия на границе между средами в виде $V_x^{(1)} = V_x^{(2)}$, $V_z^{(1)} = V_z^{(2)}$, $W_z^{(1)} = 0$, $W_z^{(2)} = 0$, $\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}$, $\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}$. Для каждой волны зависимость от координат и времени имеет вид $e^{i\omega(t - px \mp qz)}$, где знак при z зависит от направления волны. Параметр p выражает отношение синуса угла распространения волны и ее скорости. Согласно закону Снеллиуса, данный параметр одинаков для всех

волн, возникающих на границе. Параметр q - вертикальная медленность. p и q выражаются следующим образом: $p = \sin \theta_{inc} / c_{p1}^{(1)}$, $q_j^{(m)} = \sqrt{1 / c_j^{(m)2} - p^2}$.

Применим систему условий для волнового поля, включающего падающую Р-волну и отраженные Р-волну и S-волну в упругом слое и проходящие быструю и медленную Р-волны и S-волну в пористом. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& c_p^{(1)} p (1 + R_{PP}) + c_s^{(1)} q_s^{(1)} R_{PS} = p (c_{p1}^{(2)} + c_{p2}^{(2)} k_T) T_{PP1} - c_s^{(2)} q_s^{(2)} T_{PS}, \\
& c_p^{(1)} q_p^{(1)} (1 - R_{PP}) + c_s^{(1)} p R_{PS} = (c_{p1}^{(2)} q_{p1}^{(2)} + c_{p2}^{(2)} q_{p2}^{(2)} k_T) T_{PP1} + c_s^{(2)} p T_{PS}, \\
& 2c_p^{(1)} p q_p^{(1)} \mu^{(1)} (1 - R_{PP}) + c_s^{(1)} \mu^{(1)} (p^2 - q_s^{(1)2}) R_{PS} = \\
& (2c_{p1}^{(2)} p q_{p1}^{(2)} \mu^{(2)} + 2c_{p2}^{(2)} p q_{p2}^{(2)} \mu^{(2)} k_T) T_{PP1} + c_s^{(2)} \mu^{(2)} (p^2 - q_s^{(2)2}) T_{PS} \\
& (Z^{(1)} - 2c_p^{(1)} p^2 \mu^{(1)}) (1 + R_{PP}) - 2c_s^{(1)} p q_s^{(1)} \mu^{(1)} R_{PS} = \\
& \left(\left(\beta_{p1}^{(2)} + c_{p1}^{(2)} \mu^{(2)} \left(\frac{4q_{p1}^{(2)2}}{3} - \frac{2p^2}{3} \right) \right) + \left(\beta_{p2}^{(2)} + c_{p2}^{(2)} \mu^{(2)} \left(\frac{4q_{p2}^{(2)2}}{3} - \frac{2p^2}{3} \right) \right) k_T \right) T_{PP1} + \\
& 2c_s^{(2)} p q_s^{(2)} \mu^{(2)} T_{PS}, \\
& T_{PP2} = -\frac{\gamma_{11}^{(2)}}{\gamma_{12}^{(2)}} T_{PP1} \equiv k_T T_{PP1},
\end{aligned} \tag{5}$$

где R_{PP} , R_{PS} – коэффициенты отражения волн, T_{PP1} , T_{PP2} , T_{PS} – коэффициенты прохождения. Также $\beta_j^{(2)} = (K^{(2)} + K_1'^{(2)} \gamma_{1j}^{(2)} + K_2'^{(2)} \gamma_{2j}^{(2)}) / c_j^{(2)}$.

Результаты

Рассмотрим зависимость скоростей волн в пористой среде относительно объемной доли флюида. Пусть параметры скелета - $V_P = 3800$ м/с, $V_S = 2400$ м/с, $\rho = 2500$ кг/м³, а параметры флюида - $V_P = 1500$ м/с, $V_S = 0$ м/с, $\rho = 1400$ кг/м³. Графики для скоростей изображены на (рис. 2). Скорость быстрой продольной волны в граничных случаях соответствует упругим параметрам фаз, а скорость медленной волны равна нулю (отсутствие медленной волны).

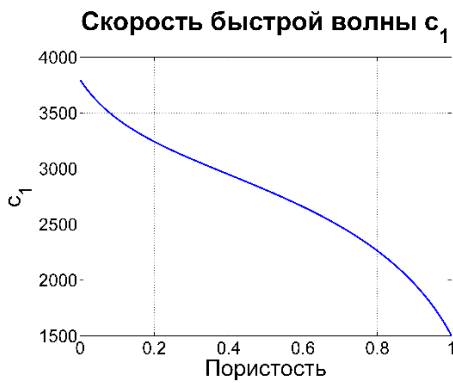


Рис. 2.1. Скорость быстрой волны

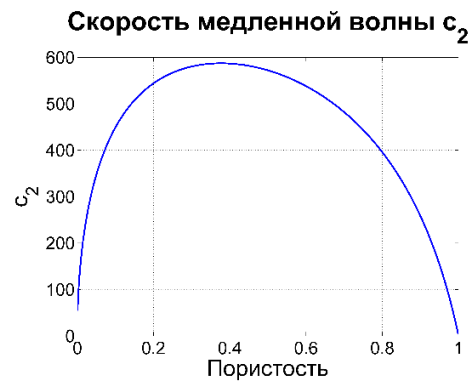


Рис. 2.2. Скорость медленной волны

Рис. 2. Зависимость скоростей волн от пористости

На (рис. 3) изображены графики зависимости коэффициентов отражения и прохождения для двух двухслойных сред с различным контрастом. В обоих случаях упругий слой имеет параметры $V_P = 1800 \text{ м/с}$, $V_S = 900 \text{ м/с}$, $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$, а флюид пористого слоя – $V_P = 1500 \text{ м/с}$, $V_S = 0 \text{ м/с}$, $\rho = 1040 \text{ кг/м}^3$. В случае среды с высоким контрастом параметры скелета – $V_P = 3800 \text{ м/с}$, $V_S = 2400 \text{ м/с}$, $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, а в случае среды с низким – $V_P = 1800 \text{ м/с}$, $V_S = 900 \text{ м/с}$, $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$. Параметры коэффициентов в граничных случаях соответствуют таковым для соответствующих упругих сред.

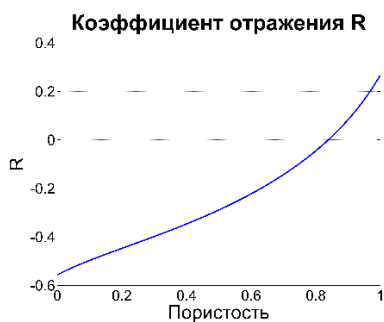


Рис. 3.1. Коэффициент отражения для среды с высоким контрастом

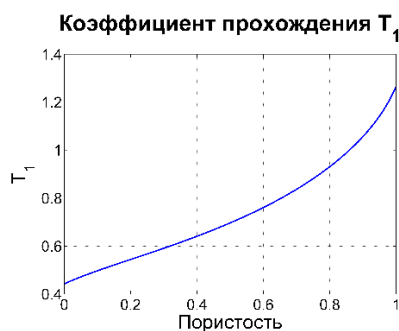


Рис. 3.2. Коэффициент прохождения медленной волны для среды с высоким контрастом

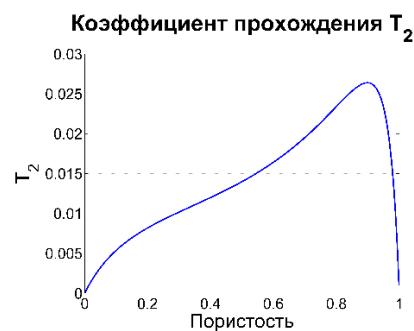


Рис. 3.3. Коэффициент прохождения быстрой волны для среды с высоким контрастом

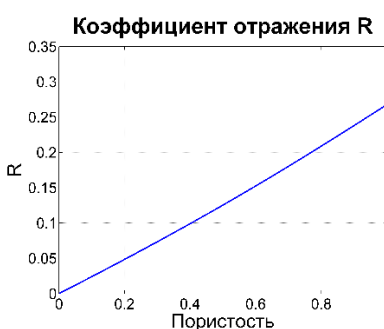


Рис. 3.4. Коэффициент отражения для среды без контраста

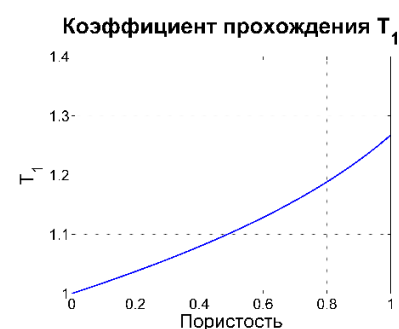


Рис. 3.5. Коэффициент прохождения медленной волны для среды без контраста

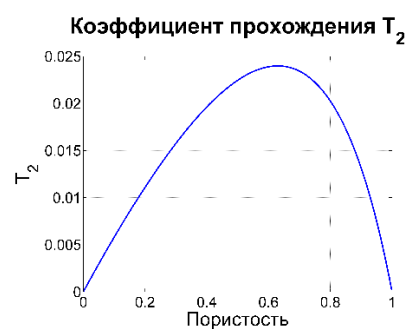


Рис. 3.6. Коэффициент прохождения быстрой волны для среды без контраста

Рис. 3. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от пористости для среды с высоким контрастом (вверху) и с низким (внизу)

Исследуем зависимость коэффициентов отражения и прохождения от угла падения при различных значениях пористости. Рассмотрим случай среды с высоким контрастом (параметры указаны выше). Графики зависимостей изображены на (рис. 4). Заметим, что пористость существенно влияет на характер зависимости коэффициентов от угла падения и на величину критического угла.

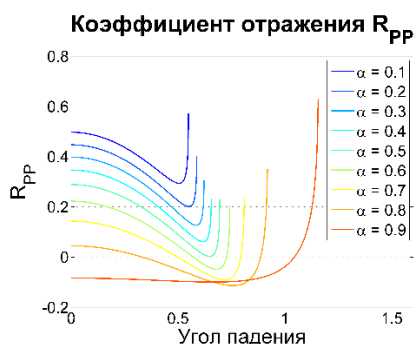


Рис. 4. 1. Коэффициент отражения продольной волны

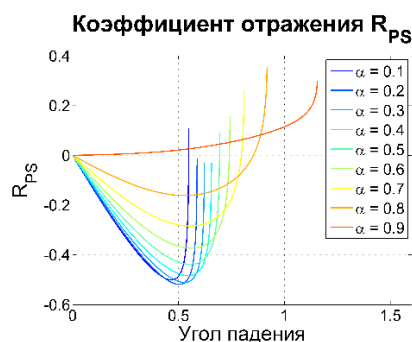


Рис. 4. 2. Коэффициент отражения поперечной волны

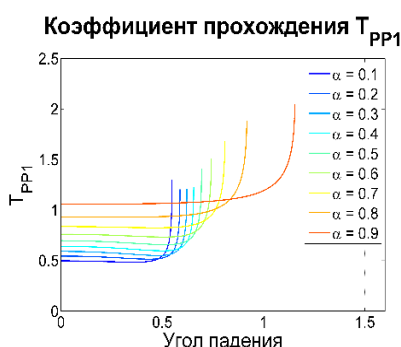


Рис. 4. 3. Коэффициент прохождения быстрой продольной волны

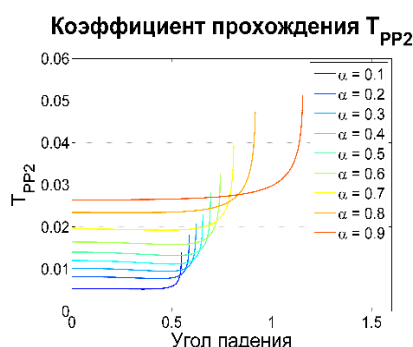


Рис. 4. 4. Коэффициент прохождения медленной продольной волны

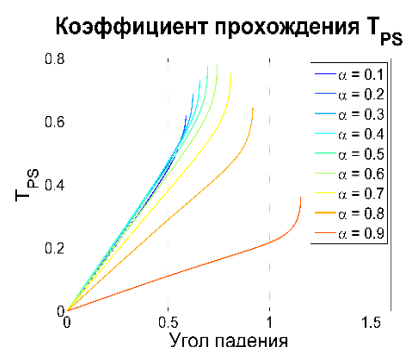


Рис. 4. 5. Коэффициент прохождения поперечной волны

Рис. 4. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от угла падения

Обсуждение

Проверим согласованность полученных формул с известными выражениями для упругой среды. Рассмотрим краевые случаи, когда объемная доля флюида равна нулю. Пусть объемные доли флюидов равны 0, а объемная доля скелета равна единице. Тогда имеем упругую среду. Подставим данные значения в формулу (3) и получим выражение:

$$c_1^2 = \frac{K_3 + \frac{4}{3}\mu}{\rho}; \quad c_2 = 0. \quad (6)$$

Выражение для c_1 соответствует известной формуле скорости продольной волны в пористой среде. Значение c_2 равно нулю, что соответствует отсутствию медленной волны в среде.

Далее рассмотрим границу между упругой средой с параметрами $V_P = 1800$ м/с, $V_S = 900$ м/с, $\rho = 1500$ кг/м³ и пористой средой с параметрами фаз $V_P = 1500$

м/с, $V_S = 0$ м/с, $\rho = 1040$ кг/м³ и $V_P = 3800$ м/с, $V_S = 2400$ м/с, $\rho = 2500$ кг/м³. Известны выражения для коэффициентов отражения и прохождения для границы между двумя упругими средами:

$$R = \frac{Z^{(1)} - Z^{(2)}}{Z^{(1)} + Z^{(2)}}; \quad T = \frac{2Z^{(1)}}{Z^{(1)} + Z^{(2)}}, \quad (7)$$

где $Z^{(i)}$ - акустический импеданс упругой среды i . Устремим параметр пористости к нулю. Пусть $\alpha = 10^{-6}$. Тогда в коэффициенты в пористой среде имеют значения $R = -0.5574$, $T_1 = 0.4426$, $T_2 = 7.9529 \cdot 10^{-8}$. Согласно формулам (7), коэффициенты для соответствующей упругой среды имеют значения $R = -0.5574$, $T = 0.4426$. Таким образом, при пористости $\alpha \rightarrow 0$ в пористой среде коэффициенты R и T_1 стремятся к значениям R и T в упругой среде, а $T_2 \rightarrow 0$, что указывает на отсутствие проходящей медленной волны.

Проверим согласованность формул, полученных для нормального падения волны и падения под углом. При $\theta = 0$ система уравнений (5) вырождается в систему (4). Таким образом решения для нормального падения и падения под углом согласуются.

Возможно применение вышеуказанных формул для совершенствования метода наименьших квадратов при решении обратной задачи, а также разработке новых методов. Полученные коэффициенты объясняют влияние упругих параметров среды на поведение невязки. Используя вариации амплитуд и формулу скоростей в пористой среде, возможно восстановление пористости нижнего слоя. Глубину упругого слоя же можно восстановить по первым вступлениям на сейсмотрассах.

Заключение

В работе представлен вывод формул для нахождения коэффициентов отражения и прохождения между упругим и трехфазным пористым слоем. В дальнейшем планируется разработка двухэтапного метода решения обратной задачи с применением полученных результатов.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I. Thermodynamically compatible hyperbolic model of a compressible multiphase flow in a deformable porous medium and its application to wavefields modeling // AIP Conf. Proc. 2021. Vol. 2448. P. 020019.
2. Reshetova G., Shiyapov K., Zakharov V., Cheverda V. Parallel Implementation of HTC Model for Wave Propagation in Multiphase Poroelastic Media // Parallel Computing Technologies. 2025. P. 247–259.

3. Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* 28(2), 168–178 (1956)
4. Romenski, E., Reshetova, G., Peshkov, I., Dumbser, M.: Modeling wavefields in saturated elastic porous media based on thermodynamically compatible system theory for two-phase solid-fluid mixtures. *Computers and Fluids* 206, 104587 (2020)
5. Reshetova, G., Romenski, E.: Diffuse interface approach to modeling wavefields in a saturated porous medium. *Applied Mathematics and Computation* 398(C) (2021)
6. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I.: Computational model for compressible two-phase flow in deformed porous medium. *Lecture Notes in Computer Science*. In: Gervasi, O., et al. (eds.) *Computational Science and Its Applications– ICCSA 2021, LNCS*, vol. 12949, pp. 224– 236. Springer, Cham. (2021)
7. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I.: Two-phase hyperbolic model for porous media saturated with a viscous fluid and its application to wavefield simulation. *Applied Mathematical Modelling* 106, 567–600 (2022)
8. Reshetova, G., Romenski, E. Modeling the variability of seismic properties of frozen multiphase media depending on temperature. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, Vol. 21, No. 2, pp. B202 B230 (2024) <https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.B11>
9. J. Virieux, “P-SV wave propagation in heterogeneous media; velocity-stress finite-difference method,” *Geophysics* 51, 889–901 (1986).

© B. C. Захаров, 2026