

Н. Д. Яковлева^{1✉}, М. Я. Брын¹

Определение и оценка точности объёмов объектов недвижимости, представленных тетраэдральной и призматической 3D-моделью

¹Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
e-mail: natashayakovleva24@gmail.com

Аннотация. В статье разработан обобщённый подход к определению и оценке точности объёмов объектов недвижимости, представленных в виде тетраэдральной и призматической трёхмерной модели. Объект рассматривается как замкнутый полиэдр, разделенный на совокупность тетраэдров и/или треугольных призм. Получены аналитические выражения объёмов элементарных тел через приращения координат, что обеспечивает инвариантность результатов относительно выбора системы координат. Выполнен вывод формул средних квадратических ошибок объёмов с учётом полной ковариационной матрицы наблюдений для координатных и разностно-координатных измерений. Проведён сравнительный анализ методов, показано, что разностно-координатный подход обеспечивает снижение дисперсии за счёт исключения общей ошибки начала координат. Установлено влияние геометрических характеристик элементов модели на точность вычислений. Сформулирован критерий оптимального разбиения объекта недвижимости, включающий условия равенства объёмов элементов и минимизации их геометрической вытянутости. Показано, что комбинированное использование тетраэдров и призм позволяет повысить эффективность моделирования и устойчивость оценки объёмов.

Ключевые слова: трёхмерный кадастр, тетраэдр, призма, объём, оценка точности, средняя квадратическая ошибка

N. D. Yakovleva^{1✉}, M. Ya. Bryn²

Definition and accuracy assessment of volumes of real estate objects represented by tetrahedral or prismatic 3D models

^{1,2} Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University,
St. Petersburg, Russian Federation
e-mail: natashayakovleva24@gmail.com

Abstract. This article presents a generalized approach to determining and assessing the accuracy of volumes of real estate objects represented by tetrahedral and prismatic three-dimensional models. The object is considered as a closed polyhedron subdivided into a set of tetrahedra and triangular prisms. Analytical expressions for the volumes of elementary bodies are obtained using coordinate increments, which ensures invariance of the results with respect to the choice of coordinate system. Formulas for the root mean square errors of volumes are derived taking into account the full covariance matrix of observations for both coordinate and difference-based measurements. A comparative analysis of the methods is performed, showing that the difference-based approach reduces variance by eliminating the common origin error. The influence of geometric characteristics of model elements on computational accuracy is established. A criterion for the optimal subdivision of a real estate object is formulated, including conditions of equal element volumes and minimization of their geometric elongation. It is shown that the combined use of tetrahedra and prisms improves modeling efficiency and the stability of volume estimation.

Keywords: 3D cadastre, tetrahedron, prism, volume, accuracy assessment, root mean square error

Введение

Современное развитие урбанизированных территорий характеризуется интенсивным освоением надземного и подземного пространства. Многоуровневые здания, подземные парковки, инженерные тоннели, транспортные развязки формируют сложную пространственную структуру имущественных комплексов.

Двумерная модель кадастрового учета, основанная на фиксации плоских координат характерных точек, не позволяет объективно отображать вертикальное разграничение прав. В международной практике активно развивается концепция трёхмерного кадастра. Например, в работах Y. Stoter и P. Van Oosterom [1] показано, что объект недвижимости в 3D-кадастре должен представляться замкнутым объёмным телом с корректной топологией. Анализ мирового опыта внедрения 3D-кадастров подтверждает использование полиэдральных моделей и их декомпозиции на простейшие элементы [2]. Стандарт ISO 19152 (LADM) закрепляет возможность описания пространственных единиц в виде объёмных тел [3]. В цифровых городских моделях (CityGML) также используется полиэдральное представление объектов [4].

В рамках концепции создания трёхмерной кадастровой системы объект недвижимости рассматривается как замкнутое ограниченное множество в трёхмерном евклидовом пространстве, представленное в виде полиэдра. Современное развитие трёхмерных кадастровых систем обусловлено необходимостью точного описания пространственной структуры объектов недвижимости, включающих сложные надземные и подземные конструкции [5-8]. Представление таких объектов в виде замкнутых полиэдров является общепринятым подходом, обеспечивающим корректность топологии и возможность вычисления геометрических характеристик.

Наиболее распространённым способом дискретизации полиэдра является тетраэдрализация, однако при моделировании объектов с выраженной слоистой или вытянутой структурой целесообразно использование призматических элементов. Это позволяет уменьшить количество элементарных тел и повысить вычислительную устойчивость.

Целью работы является разработка единого математического аппарата определения объёма и оценки его точности для тетраэдральных и призматических 3D-моделей.

Методы и материалы

Рассмотрим объект недвижимости как замкнутый полиэдр $P = (G, E, F)$, (где G – множество вершин, E – ребра, F – грани), представленный объединением тетраэдров и треугольных призм. Тогда общий объём определяется как сумма объёмов элементарных тел:

$$V = \sum_{i=1}^{n_t} V_i^t + \sum_{j=1}^{n_p} V_j^p . \quad (1)$$

где V_i^t – объемы тетраэдров, V_j^p – объемы призм.

Пусть тетраэдр задан вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 . Введём векторы

$$\vec{a} = A_2 - A_1, \quad \vec{b} = A_3 - A_1, \quad \vec{c} = A_4 - A_1.$$

Тогда объём тетраэдра определяется через смешанное произведение векторов:

$$V_t = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|. \quad (2)$$

Данное выражение инвариантно относительно выбора базовой вершины и удобно для использования в координатной форме через приращения координат.

Рассмотрим треугольную призму, заданную вершинами A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 , где основания параллельны. Введём векторы

$$\vec{a} = A_2 - A_1, \quad \vec{b} = A_3 - A_1, \quad \vec{c} = B_1 - A_1.$$

Объём призмы выражается аналогично, но с учётом геометрии тела

$$V_p = \frac{1}{2} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|. \quad (3)$$

Таким образом, объём призмы в три раза превышает объём соответствующего тетраэдра, построенного на тех же векторах.

Оценка точности выполняется на основе метода дифференцирования функции объёма. Пусть объём определяется функцией измеренных величин $V = f(u)$. Тогда дисперсия объёма выражается через ковариационную матрицу измерений

$$\sigma_V^2 = \Delta f^T K_U \Delta f, \quad (4)$$

где K_U – ковариационная матрица.

При координатных измерениях вектор наблюдений включает координаты вершин, а при разностно-координатных – приращения координат.

Выполним оценку точности объема тетраэдра. Предположим, что координаты вершин получены геодезическими измерениями и имеют средние квадратические ошибки $m_{x_i} = m_{y_i} = m_{z_i} = m$. Ошибки считаются независимыми.

Получим выражение i-ого тетраэдра:

$$m_{V_i^t} = \frac{m}{6} \sqrt{2(|b \times c|^2 + |c \times a|^2 + |a \times b|^2)}. \quad (5)$$

Аналогично для j-ой призмы:

$$m_{V_j^p} = \frac{m}{2} \sqrt{2(|b \times c|^2 + |c \times a|^2 + |a \times b|^2)}. \quad (6)$$

Результаты

Анализ частных производных показывает, что для тетраэдра средняя квадратическая ошибка объёма пропорциональна площади его граней и средней квадратической ошибке координат

$$\sigma_{V_t} = L^2 \sigma, \quad (7)$$

где L – характерный линейный размер тетраэдра.

Для призмы аналогичный анализ даёт

$$\sigma_{V_p} = 3\sigma_{V_t}, \quad (8)$$

что объясняется линейной зависимостью объёма призмы от соответствующего тетраэдрального представления.

Установлено, что относительная ошибка объёма

$$\frac{\sigma_t}{V} = \frac{\sigma}{L}, \quad (9)$$

возрастает при уменьшении линейных размеров элементов модели, что особенно важно при высокой степени детализации.

При использовании координатных измерений наличие корреляции и общей ошибки начала координат приводит к увеличению дисперсии. В случае разностно-координатных измерений эта составляющая исключается, что обеспечивает более устойчивую оценку

$$\sigma_V^2(\Delta) < \sigma_V^2(u). \quad (10)$$

Обсуждение

Полученные результаты показывают, что точность определения объёма зависит не только от точности измерений, но и от геометрии элементарных тел. Тетраэдры обеспечивают универсальность разбиения, однако при малых размерах становятся чувствительными к ошибкам измерений.

Призматические элементы, напротив, позволяют использовать более крупные геометрические блоки при сохранении точности, особенно для объектов с регулярной структурой. Это снижает количество элементов модели и уменьшает накопление ошибок.

Оптимальное разбиение объекта достигается при выполнении условия равенства объёмов элементов

$$V_i = \text{const}, \quad (11)$$

а также минимизации их геометрической вытянутости. В общем случае дисперсия суммарного объёма минимизируется при решении задачи

$$\sum \sigma_{V_i}^2 \rightarrow \min. \quad (12)$$

Комбинированное использование тетраэдров и призм позволяет учитывать особенности геометрии объекта и повышать эффективность моделирования.

Заключение

В работе разработан обобщённый метод определения объёмов объектов недвижимости, представленных тетраэдральной и призматической 3D-моделью. Получены аналитические формулы объёмов и их точности на основе координатных и разностно-координатных измерений. Доказано, что разностно-координатный метод обеспечивает более высокую точность за счёт исключения общей ошибки координат. Установлено влияние геометрии элементов модели на точность вычислений и сформулирован критерий оптимального разбиения. Показано, что комбинированная тетраэдрально-призматическая модель является наиболее эффективной для задач трёхмерного кадастра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Stoter J., Van Oosterom P. 3D Cadastre in an International Context: Legal, Organizational, and Technological Aspects. Boca Raton: CRC Press, 2006. 323 p.
2. Van Oosterom P., Stoter J., Ploeger H., Thompson R., Karki S. World-wide inventory of the status of 3D cadastres in 2014 and expectations for 2018 // Proceedings of the 5th International FIG 3D Cadastre Workshop. Athens, 2016. P. 1–18.
3. ISO 19152:2012. Geographic information — Land Administration Domain Model (LADM). Geneva: ISO, 2012. 118 p.
4. Gröger G., Kolbe T.H., Nagel C., Häfele K.H. OGC City Geography Markup Language (CityGML) Encoding Standard. Version 2.0.0. Open Geospatial Consortium, 2012. 344 p.3. Токин А. А., Шоломицкий А. А. Методика автоматизированной съёмки и подсчета объемов сыпучих материалов на складах // Вестник СГУГиТ. – 2025. – Т. 30, № 3. – С. 31–40. – DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-3-31-40.
5. Бердюгина, А. А. Разработка структуры и содержания 3D-моделей объектов недвижимости в ЕГРН / А. А. Бердюгина, А. В. Чернов. – Текст : непосредственный // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XVI Междунар. науч. конгр., 18 июня – 8 июля 2020 г., Новосибирск : сб. материалов в 8 т. Т. 3 : Междунар. науч. конф. 124 «Экономическое развитие Сибири и Дальнего Востока. Экономика природопользования, землеустройство, лесоустройство, управление недвижимостью». – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. № 2 –87–98 с.
6. Дементьев, В. Е. Современная геодезическая техника и ее применение: Учебное пособие для вузов. / В. Е. Дементьев. – М.: Академический Проект, 2008. – 591 с.
7. Аврунев Е. И., Дорош М. П. Разработка информационной модели для повышения достоверности кадастровой информации // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). – 2018.– Т. 23, № 1. – С. 156–166.
8. Портнов А.М., Добровольский Д.О., Сравнительная оценка геометрической сложности контуров объектов местности при осуществлении государственного земельного надзора и мониторинга земель на примере объектов капитального строительства // Геодезия и картография. – 2024. – № 3. – С. 50-61. DOI: 10.22389/0016-7126-2024-1005-3-50-61.

© Н. Д. Яковлева, М. Я. Брынь, 2026