

Н. Д. Яковлева^{1✉}, М. Я. Брын¹

Определение и оценка точности объемов земляного полотна железных дорог для целей 3D-кадастра

¹Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
e-mail: natashayakovleva24@gmail.com

Аннотация. В стране получает развитие трехмерный кадастр, в котором более точно отображаются объемные характеристики объектов недвижимости. Постановка на кадастровый учет железных дорог в контексте 3D-кадастра предполагает использование 3D-технологий для более точного учета и визуализации объектов инфраструктуры. Это позволяет учитывать сложные пространственные отношения и улучшает управление земельными ресурсами. Одной из основных характеристик объектов недвижимости в 3D-кадастре являются их объемы. В статье приводятся формулы определения и оценки точности объема объектов недвижимости, имеющих форму усеченной пирамиды по результатам линейных измерений. Показано, что средние квадратические ошибки объемов земляного полотна зависят от средних квадратических ошибок измерений в зависимости от используемых формул вычисления объемов. Минимальные средние квадратической ошибки вычисления их объемов будут при вычислении объемов по аналитическому методу поперечных профилей и вычислении объемов по предложенному методу разбивки на элементарные фигуры. При определении объема земляного полотна с использованием формул элементарных фигур средние квадратические ошибки объемов усеченных пирамид зависят от средних квадратических ошибок измерения высот усеченных пирамид, их объемов, площадей оснований и от геометрии усеченных пирамид, т. е. от соотношения высоты усеченной пирамиды к площадям оснований. Минимальные средние квадратической ошибки вычисления их объемов будут у усеченных пирамид, у которых отношение высоты к среднегеометрическому площадей оснований равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (при вычислении объема по высоте конуса и площадям оснований).

Ключевые слова: 3D-кадастр, определение объема, оценка точности, средняя квадратическая ошибка, земляное полотно

N. D. Yakovleva^{1✉}, M. Ya. Bryn¹

Determination and estimation of the accuracy of railway roadbed volumes for 3D cadastre purposes

¹St. Petersburg State University of Railways of Emperor Alexander I,
St. Petersburg, Russian Federation
e-mail: natashayakovleva24@gmail.com

Abstract. A three-dimensional cadastre is being developed in the country, which more accurately displays the volumetric characteristics of real estate objects. The cadastral registration of railways in the context of a 3D cadastre involves the use of 3D technologies for more accurate accounting and visualization of infrastructure facilities. This allows you to take into account complex spatial relationships and improves land management. One of the main characteristics of real estate objects in the 3D cadastre is their volume. The article provides formulas for determining and estimating the accuracy of the volume of real estate objects shaped like a truncated pyramid based on the results of linear

measurements. It is shown that the average squared errors of the volumes of the roadbed depend on the average squared measurement errors, depending on the formulas used to calculate the volumes. The minimum average squared error of calculating their volumes will be when calculating volumes using the analytical method of transverse profiles and calculating volumes using the proposed method of splitting into elementary shapes. When determining the volume of an earthen bed using formulas of elementary shapes, the average square errors of the volumes of truncated pyramids depend on the average square errors of measuring the heights of the truncated pyramids, their volumes, the areas of the bases and on the geometry of the truncated pyramids, i.e. on the ratio of the height of the truncated pyramid to the areas of the bases. The minimum average squared error of calculating their volumes will be for truncated pyramids, in which the ratio of height to the geometric mean of the base areas is equal (when calculating volume by the height of the cone and the base areas).

Keywords: 3D cadastre, volume determination, accuracy estimation, average square error, roadbed

Введение

Вопросы применения 3D-технологий при ведении кадастра недвижимости, становятся все более актуальными [1, 2]. Это обусловлено тем, что при ведении кадастра недвижимости в двумерном формате возникают сложности с адекватным отображением объектов недвижимости (ОН), имеющих сложную форму. Двумерный кадастр, не учитывает подземную инфраструктуру и конструкции, расположенные над поверхностью. К таким объектам относятся мосты, тоннели, здания с нависающими пристройками, транспортные системы, железные дороги и телекоммуникационные сети и др. [3, 4].

На 1 января 2024 года в Едином государственном реестре недвижимости (ЕГРН) числилось более 110 млн объектов недвижимости (с учётом земельных участков, зданий, помещений и сооружений). Ежегодный прирост составляет около 5–7 млн объектов. Железные дороги так же относятся к объектам недвижимости, около 80% которых учтены в ЕГРН [5].

Железная дорога представляет собой линейную строительную систему, состоящую из наземных, надземных и (или) подземных частей, включающую несущие, а в некоторых случаях и ограждающие строительные конструкции, предназначенные для осуществления производственных процессов и перемещения железнодорожного подвижного состава [6]. В качестве объекта капитального строительства железная дорога является линейным сооружением и подлежит обязательному кадастровому учету. Однако процесс кадастрового учета железных дорог усложняется протяженностью, многоуровневой структурой и специфическим правовым статусом земель. Традиционные методы кадастрового учета, железных дорог основанные на двумерном формате приводят к ошибкам при определении границ, пересечениям их с другими объектами.

Внедрение 3D-кадастра железных дорог позволит значительно повысить точность и полноту информации о пространственном положении железнодорожных путей и сопутствующих объектов транспортной инфраструктуры, что будет способствовать более эффективному управлению земельными ресурсами и пространственному планированию.

Методы и материалы

Земляное полотно является одним из основных элементов железнодорожного пути, обеспечивающим устойчивость и долговечность конструкции. Определение объемов земляного полотна необходимо не только для проектирования, строительства и реконструкции железных дорог, но и позволит более детально и объективно оценивать объекты недвижимости для налогообложения, а также позволит снизить правовые риски, связанные с инвестированием в подземные объекты, которые имеют высокую стоимость.

Для определения объемов можно использовать данные, полученные в результате измерений на местности, или информацию, извлеченную из 3D-моделей. Основными измеряемыми величинами могут быть координаты характерных точек объектов недвижимости, разности координат, расстояния и другие величины. Определяемые объемы – это функции результатов измерений, соответственно ошибки результатов измерений будут влиять на точность вычислений объемов.

На сегодняшний день используют следующие методы определения объемов земляного полотна:

1. Аналитический метод поперечных профилей, основанный на разбивке трассы на участки с постоянным поперечным сечением. Объем между соседними сечениями определяют по формуле средних площадей [7]:

$$V = \frac{(P_1 + P_2)}{2} L, \quad (1)$$

где P_1, P_2 – площади поперечных сечений, L – расстояние между сечениями.

2. Метод триангуляции, который применяется при сложном рельефе местности. Поверхность моделируется сетью треугольных призм, объем которых вычисляется по формуле [7]:

$$V_i = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3) P_{\Delta}, \quad (2)$$

где z_1, z_2, z_3 – отметки вершин треугольника, P_{Δ} – площадь основания треугольника.

Объем земляного полотна также возможно определить с применением трехмерного цифрового моделирования. Тогда, объем земляного полотна можно определить по 3D-модели.

Большинство объектов имеют сложную форму, поэтому объект разбивают на более простые фигуры, а общий объем определяется как сумма объемов элементарных фигур. Однако на практике встречаются объекты, объем которых можно определить, как объем одной элементарной геометрической фигуры. Земляное полотно можно представить, как правильную усеченную пирамиду и определять его объем на основе данной фигуры.

Рассмотрим определение объема усеченной пирамиды. Усеченная пирамида – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей пло-

скостью, параллельной основанию (рисунок 1), при этом усеченную пирамиду считают правильной если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию [8].

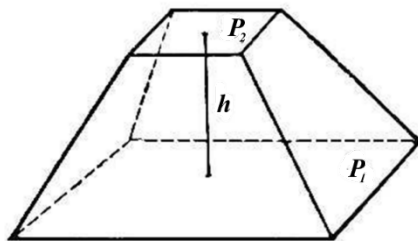


Рисунок 1 – Правильная усеченная пирамида

Формула вычисления объема V правильной усеченной пирамиды [8]:

$$V = \frac{1}{3} h(P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2), \quad (3)$$

где h – высота, P_1 – площадь нижнего основания, P_2 – площадь верхнего основания.

Результаты

Рассмотрим закономерности изменения точности вычисления объема земельного полотна при использовании различных формул. При этом использована общая формула вычисления средних квадратических ошибок функций по средним квадратическим ошибкам аргументов [9, 10].

Таблица 1

Формулы определения и оценки точности объема земельного полотна

Формула вычисления объема V	Формулы вычисления средней квадратической ошибки m_V объема V
$V = \frac{(P_1 + P_2)}{2} L$	$m_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial P_1}\right)^2 m_{P_1}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_2}\right)^2 m_{P_2}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 m_L^2}, \left(\frac{\partial V}{\partial P_1}\right) = \frac{L}{2},$ $\left(\frac{\partial V}{\partial P_2}\right) = \frac{L}{2}, \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right) = \frac{P_1 + P_2}{2}.$ Тогда $m_V = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 m_{P_1}^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_{P_2}^2 + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 m_L^2}.$ При условии $m_{P_1} = m_{P_2} = m_P$ получим: $m_V = \sqrt{\frac{L^2}{2} m_P^2 + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 m_L^2}.$ Пример: $P_1 = 15 \text{ м}^2, P_2 = 20 \text{ м}^2, L = 50 \text{ м}, m_{P_1} = m_{P_2} = 0,02 \text{ м}^2, m_L = 0,005 \text{ м}.$ Тогда: $V = 875 \text{ м}^3, m_V = 0,71 \text{ м}^3$ $\frac{m_V}{V} = \frac{0,71}{875} = \frac{1}{1230}.$

Формула вычисления объема V	Формулы вычисления средней квадратической ошибки m_V объема V
$V = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3) P_{\Delta}$	$m_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 m_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)^2 m_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_3}\right)^2 m_{z_3}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_{\Delta}}\right)^2 m_{P_{\Delta}}^2},$ $\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right) = \frac{1}{3} P_{\Delta}, \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right) = \frac{1}{3} P_{\Delta}, \left(\frac{\partial V}{\partial z_3}\right) = \frac{1}{3} P_{\Delta}, \left(\frac{\partial V}{\partial P_{\Delta}}\right) = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3).$ Тогда $m_V =$ $\sqrt{\left(\frac{1}{3} P_{\Delta}\right)^2 m_{z_1}^2 + \left(\frac{1}{3} P_{\Delta}\right)^2 m_{z_2}^2 + \left(\frac{1}{3} P_{\Delta}\right)^2 m_{z_3}^2 + \left(\frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3)\right)^2 m_{P_{\Delta}}^2}.$ При условии $m_{z_1} = m_{z_2} = m_{z_3} = m_z$ получим: $m_V = \sqrt{\frac{P_{\Delta}^2}{3} m_z^2 + \left(\frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3)\right)^2 m_{P_{\Delta}}^2}.$ Пример: $z_1 = 2,08$ м, $z_2 = 2,09$ м, $z_3 = 2,10$ м, $P_{\Delta} = 7$ м², $m_{z_1} = m_{z_2} = m_{z_3} = 0,005$ м, $m_{P_{\Delta}} = 0,02$ м². Тогда: $V = 15$ м³, $m_V = 0,046$ м³ $\frac{m_V}{V} = \frac{0,046}{15} = \frac{1}{320}.$
$V = \frac{1}{3} h (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2) \quad (1)$	$m_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 m_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_1}\right)^2 m_{P_1}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_2}\right)^2 m_{P_2}^2}, \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = \frac{1}{3} (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2), \left(\frac{\partial V}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{3} h \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{P_1 P_2}} P_2\right), \left(\frac{\partial V}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{3} h \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{P_1 P_2}} P_1\right).$ Тогда $m_V =$ $\sqrt{\left(\frac{(P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2)}{3}\right)^2 m_h^2 + \left(\frac{1}{3} h \left(1 + \frac{\sqrt{P_2}}{2\sqrt{P_1}}\right)\right)^2 m_{P_1}^2 + \left(\frac{1}{3} h \left(1 + \frac{\sqrt{P_1}}{2\sqrt{P_2}}\right)\right)^2 m_{P_2}^2}.$ (2) Пример: $h = 2,08$ м, $P_1 = 50$ м², $P_2 = 30$ м², $m_h = 0,005$ м, $m_{P_1} = m_{P_2} = 0,02$ м². Тогда: $V = 82$ м³, $m_V = 0,21$ м³ $\frac{m_V}{V} = \frac{0,21}{82} = \frac{1}{390}.$

Обсуждение

Исследуем влияние формы правильной усеченной пирамиды на точность определения её объема по формуле (1). Для вычисления средней квадратической ошибки m_V объема V правильной усеченной пирамиды используется формула (2).

При использовании формулы (2) введем коэффициент вытянутости k , равный отношению высоты усеченной пирамиды к среднеарифметическому площадей оснований, т.е., $k = \frac{h}{\sqrt{\frac{P_1 + P_2}{2}}}$. Тогда формула (2), запишется

$$m_v = m_h \frac{1}{3} \sqrt{V \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{2}}} \sqrt{\frac{4k^2 + 1}{k}}. \quad (4)$$

При этом учтено, что $m_p = \frac{1}{3} h m_h$.

Исследуя выражение $\sqrt{\frac{4k^2 + 1}{k}}$ на экстремум, приходим к выводу, что минимальное значение средней квадратической ошибки правильной усеченной пирамиды будет при $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. В этом случае

$$m_v = \frac{2}{3} m_h \sqrt{V \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{2}}}. \quad (5)$$

Если разделить формулу (3) на формулу (4), то придем к выводу, что средняя квадратическая ошибка определения объема правильной усеченной пирамиды произвольного размера, вычисляемого по его высоте и площадям оснований, будет в $\sqrt{\frac{4k^2 + 1}{k}} / \frac{1}{2}$ больше, чем у правильной усеченной пирамиды, у которой отношение ее высоты к среднеарифметическому радиусов оснований составляет $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Заключение

Таким образом, средние квадратические ошибки объемов усеченных пирамид зависят от средних квадратических ошибок измерения высот усеченных пирамид, их объемов, площадей оснований и от геометрии усеченных пирамид, т.е. от соотношения высоты усеченной пирамиды к среднеарифметическому радиусов оснований. Минимальные средние квадратической ошибки вычисления их объемов будут у усеченных пирамид, у которых отношение высоты к среднеарифметическому площадей оснований равно $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (при вычислении объема по высоте конуса и площадям оснований).

На основании изложенного можно заключить, что средние квадратические ошибки определения объемов земляного полотна зависят от средних квадратических ошибок измерений измеряемых величин в зависимости от используемых формул вычисления объемов. Минимальные средние квадратической ошибки

вычисления их объемов будут при вычислении объемов по аналитическому методу поперечных профилей и вычислении объемов по предложенному методу разбивки на элементарные фигуры. Разбивка сложных объектов на элементарные фигуры (усеченные пирамиды) с последующим суммированием объемов позволяет достичь высокой точности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малыгина О.И., Трехмерный кадастр – основа развития современного мегаполиса // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2012. VIII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Экономическое развитие Сибири и Дальнего Востока. Экономика природопользования, землеустройство, лесоустройство, управление недвижимостью» : сб. материалов в 4 т. (Новосибирск, 10-20 апреля 2012 г.). - Новосибирск : СГГА, 2012. Т. 3. – С. 129-133.
2. Николаев Н. А., Ильиных А. Л. Совершенствование системы государственного кадастра недвижимости на основе использования пространственной информации // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2016. XII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Экономическое развитие Сибири и Дальнего Востока. Экономика природопользования, землеустройство, лесоустройство, управление недвижимостью» : сб. материалов в 3 т. (Новосибирск, 18-22 апреля 2016 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. Т. 2. – С. 183-190.
3. Бердюгина, А. А. Разработка структуры и содержания 3D-моделей объектов недвижимости в ЕГРН / А. А. Бердюгина, А. В. Чернов. – Текст : непосредственный // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XVI Междунар. науч. конгр., 18 июня – 8 июля 2020 г., Новосибирск : сб. материалов в 8 т. Т. 3 : Междунар. науч. конф. 124 «Экономическое развитие Сибири и Дальнего Востока. Экономика природопользования, землеустройство, лесоустройство, управление недвижимостью». – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. № 2 – 87-98 с.
4. Федеральный закон от 13.07.2015 № 218-ФЗ (ред. от 01.07.2024) «О государственной регистрации недвижимости» // Собрание законодательства РФ. – 2015. – № 29 (часть I). – Ст. 4344.
5. Росреестр : [официальный сайт]. – URL: <https://rosreestr.gov.ru/>.
6. СНиП 32-01-95 Железные дороги колеи 1520 мм = Railways with 1520 mm track : строительные нормы и правила Российской Федерации : издание официальное : приняты и введены в действие постановлением Минстроя России от 18 октября 1995 г. № 18-94 : взамен СНиП П-39-76, СНиП III-38-75 и СН 468-74 : дата введения 1996-01-01 / разработаны институтом ЦНИИС с участием ВНИИЖТ, ПромтрансНИИпроект, Мосгипротранс, Ленгипротранс, МИИТ, ЛИИЖТ, ДИИТ, НИИЖТ, ТашиИТ, ВЗИИТ. – Минстрой России : ГП ЦПП, 1995. – IV, 16 с.
7. СП 32-104-98 Проектирование земляного полотна железных дорог колеи 1520 мм = Design of earthwork for rail ways with 1520 mm track : свод правил по проектированию и строительству : издание официальное : утвержден зам. директора ОАО «ЦНИИС» 27.12.96 : разработан впервые : дата введения 1999-01-01 / разработан институтом ОАО «ЦНИИС» с участием ВНИИЖТ, ОАО «Мосгипротранс», АО «Ленгипротранс», АО «Сибгипротранс», Киевгипротранс, Московского государственного университета путей сообщения, РИСИ, ПромтрансНИИпроект, ТашиИТ. – Москва : Госстрой России; ГУП ЦПП, 1999. – IV, 71 с. – Текст : непосредственный
8. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: учебник. – 2-е изд., исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 624 с.: ил. – (Учебная литература для вузов).
9. Брынь, М. Я. О точности вычисления площадей фигур по координатам вершин и длинам сторон [Текст] / М. Я. Брынь // Геодезия и картография. – 2001. – № 5. – С. 37-41.
10. Брынь, М. Я. О точности вычисления площадей фигур городских земельных участков [Текст] / М. Я. Брынь // Записки горн. Ин-та. Маркш. Дело и геод.. – 2001. – № 146. – С. 164-167.
11. Портнов А.М., Добровольский Д.О., Сравнительная оценка геометрической

сложности контуров объектов местности при осуществлении государственного земельного надзора и мониторинга земель на примере объектов капитального строительства // Геодезия и картография. – 2024. – № 3. – С. 50-61. DOI: 10.22389/0016-7126-2024-1005-3-50-61.

12. Карпик А. П., Жарников В. Б., Ларионов Ю. С. Рациональное землепользование в системе современного пространственного развития страны, его основные принципы и механизмы // Вестник СГУГиТ. – 2019, Т. 24, № 4. – С. 232–246.

13. Аврунев Е.И., Гиниятов А.И. Современное состояние и проблемы геодезического обеспечения создания и ведения трехмерного кадастра недвижимости [Электронный ресурс]: Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и геопропространственное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения: сб. материалов 3-й Национальной научно-практической конференции, 27-29 ноября 2019 г., Новосибирск, СГУГиТ. – Режим доступа: <http://nir.sgugit.ru/elektronnye-publikatsii-noyab19/>. – Текст : электронный.

© Н. Д. Яковлева, М. Я. Брынь, 2025