

В. В. Сказка^{1✉}, А. С. Сердюков¹, А. В. Азаров¹

О построении целевых функционалов с использованием преобразования Стоквелла при решении обратных задач геофизики.

¹Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: vskazka@gmail.com

Аннотация. Сейсмические методы активно применяются при решении задач контроля состояния горных пород и подземных сооружений. При этом, основная часть предлагаемых подходов ориентирована на использовании объемных волн. Однако, обычно трактуемые как помехи, поверхностные волны несут до 75% волнового поля вблизи границы. И можно попытаться использовать фазовые характеристики поверхностных волн для решения обратных задач с целью определения скорости поперечных волн вблизи границы. В работе рассматривается возможность использования одного целевого функционала, полученного с использованием S-преобразования, для решения обратной задачи восстановления свойств среды вблизи границы шахт и штолен. Основное его отличие от обычно рассматриваемых состоит в том, что там комплексно используется как фазовая скорость, так и групповая. Показано, что несмотря на то, что этот функционал и сам является «приближенным», задача его минимизации вполне решает обратную задачу в простейших случаях.

Ключевые слова: поверхностные волны, фазовая скорость, групповая скорость, целевой функционал, обратная задача

V. V. Skazka^{1✉}, A. S. Serdyukov¹, A. V. Azarov¹

On constructing objective functionals using the Stockwell transform when solving inverse problems of geophysics.

¹Chinakal Institute of Mining SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: vskazka@gmail.com

Abstract. Seismic methods are actively used to solve problems of monitoring the state of rocks and underground structures. At the same time, the main part of the proposed approaches is focused on the use of volumetric waves. However, surface waves, usually treated as interference, carry up to 75% of the wave field energy near the boundary. And one can try to use the phase characteristics of surface waves to solve inverse problems in order to determine the velocity of transverse waves near the boundary. The paper considers the possibility of using one target functional obtained using the S-transformation to solve the inverse problem of restoring the properties of the medium near the boundary of mines and adits. Its main difference from those usually considered is that both the phase velocity and the group velocity are used in it. It is shown that despite the fact that this functional itself is "approximate", the problem of its minimization completely solves the inverse problem in the simplest cases.

Keywords: surface waves, phase velocity, group velocity, objective functional, inverse problem

Введение

Целью данной работы является исследование возможности одного из подходов для решения обратных задач, с целью определения параметров среды вблизи шахт и штолен. И продолжает исследования в данном вопросе, начатые в [1-2].

S-преобразование это одно из «оконных преобразований Фурье». См. [3-5] В геофизики оно может быть использовано, в частности, для построения т.н. $f - k$ спектров сейсмограмм [5], на основании которых можно будет получить фазовые скорости поверхностных волн. Этот подход, анализа $f - k$ спектров, как и терминология, взяты из анализа сейсмограмм путем двумерного преобразования Фурье измеренных сейсмограмм. $f - k$ спектры, в свою очередь, позволяют сделать те или иные заключения о среде, в которой эти волны распространяются. В данной работе рассматривается способ использовать некоторые, обычно сами по себе не используемые данные, полученные при построении $f - k$ спектров, для решения обратных задач. Чтобы отличать 'спектры, полученные при применении S-преобразования, будем обозначать их $Sf - k$ спектрами.

Построение функционала. 1 Функции.

S-преобразование временного сигнала $g(t)$ имеет следующий вид

$$S[g(\cdot)](t, f) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-\frac{f^2(t-\tau)^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (1)$$

Здесь σ некоторый параметр, отвечающий за «ширину окна».

В [5] для построения $Sf - k$ спектров применялась следующая схема. Пусть у нас в каждой точке по оси z наблюдается сигнал $g(z, t)$. Обозначим $G(z, t, f) = S[g(z, \cdot)](z, t, f)$. Если $g(z, t)$ запись прохождения поверхностной волны, то известно следующее соотношение [4]

$$G(z + l, t, f) = e^{-i2\pi k(f)l} e^{-\lambda(f)l} G(z, t - k'(f)l, f) \quad (2)$$

Здесь $k(f)$ - волновое число. $\lambda(f)$ - частотно зависимый параметр затухания. Собственно, это приближенная формула, полученная в предположении, что $k''(f)$ мало.

И далее, обозначим

$$\Omega(u, f, k) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \frac{z}{u}, f) e^{2\pi z k} dz \right| \quad (3)$$

Тогда $Sf - k$ спектр описывается функцией

$$P(f, k) = \max_u \Omega(u, f, k) \quad (4)$$

Пусть максимум в (4) достигается в некоторой точке

$$U(f, k) = \arg \max_u \Omega(u, f, k) \quad (5)$$

Из (2) следует, что в простейших случаях сигнала, типа бегущей волны, когда отсутствует дисперсия волны (или дисперсия мала), Ω из (3) будет достигаться, когда u - групповая скорость (или не сильно отличается от групповой скорости).

Построение функционала. 2 Обратная задача.

Рассмотрим модель среды вне штольни. Это будет область $V = \{(x, y, z) | r^2 \equiv x^2 + y^2 > r_0^2, z \in (-\infty, \infty)\}$ - внешность бесконечного цилиндра. Считаем, что параметры среды будут цилиндрически симметричны. Пусть в ней происходит волновой процесс, также цилиндрически симметричный. И мы меряем волновое поле на границе цилиндра - $g(z, t)$.

Считаем, что в полном волновом поле главную часть составляют поверхностные волны. Причем их свойства в основном зависят от свойств среды под точкой наблюдения (при фиксированном z). Это приводит нас к следующему постановке обратной задачи.

По функции $g(z, t)$ строим функцию $U(f, k)$ из (5).

Рассмотрим модель среды с кусочно-постоянными параметрами. Не зависящими от z . Мы будем считать плотности постоянными и не искать их. Таким образом, параметрами среды будут V_P, V_S - скорости продольных и поперечных волн. А также линии разрыва коэффициентов $R = \{r = r_i, i = 1, \dots, n\}$, на которых мы будем предполагать, что соответствующие напряжения и смещения равны. Решение уравнений Ламе будем искать в виде $V(r) \exp(i2\pi(ft - kz))$. Это приведет нас к задаче

$$L\left(r, f, k, \frac{d}{dr}\right)V = 0 \quad (6)$$

Здесь мы через L обозначили соответствующий дифференциальный оператор, вместе с соответствующими условиями на разрывах. Точный вид этих уравнений в данном случае не слишком важен, так как мы не обсуждаем решение задачи (6). Для уравнения (6) ставится задача: при каждом f найти такие $k(f)$, что (6) имеет нетривиальное решение. При этом $\frac{f}{k(f)}$ - фазовая скорость волны, а $\left(\frac{dk}{df}\right)^{-1}$ - групповая скорость. В отличие от задач в полупространстве, когда рассматривается внешность цилиндра, существует нижняя граница f при которой существуют волновые числа $k(f)$ и задача (6) имеет нетривиальное решение. .

Известно, что фазовые скорости поверхностных волн мало зависят скоростей продольных волн. Поэтому, при решении обратных задач, мы будем предполагать, что $V_P = \sqrt{3}V_S$. Тем самым наша среда описывается с помощью R и $V = \{V_S^i, i = 1, n+1\}$ - скоростями в слоях: $V_S(r) = V_S^i, r_{i-1} < r < r_i$, $V_S(r) = V_S^{n+1}, r > r_n$ Рассмотрим следующий функционал

$$\Phi(V, R) = \int_{f_1}^{f_2} \left[\left(\frac{dk(f)}{df} \right)^{-1} - U(f, k(f)) \right]^2 df. \quad (7)$$

С учетом того, что у нас используется дискретное преобразование Фурье, в (7) интеграл – это конечная сумма, а $U(f, k) = (u(f_i, k_j))$ - матрица. Сам функционал можно было бы определить и таким образом, но с учетом того, что мы планируем вычислять вторые производные от функционала, окончательный вид функционала, исследуемого в статье, следующий:

$$\Phi(V, R) = \sum_{i=1}^{N_f} \left[\left(\frac{dk(f_i)}{df} \right)^{-1} - SU_{f_i}(k(f_i)) \right]^2 \quad (8)$$

где $SU_{f_i}(\cdot)$ - кубический сплайн, проходящий через точки $u(f_i, k_j)$.

Конечно, (8) не единственный тип функционала, минимизация которого может дать возможность определить структуру среды при таком подходе. Так, вместо (7) можно рассмотреть, например, следующий функционал:

$$F(V, R) = - \int_{f_1}^{f_2} P(f, k(f)) df, \quad (9)$$

где P определена в (4). Из-за ограниченности места мы не обсуждаем этот подход.

Обратная задача. Некоторые результаты.

1. Однородная среда.

В качестве данных для решения обратных задач брались синтетические сейсмограммы, построенные с помощью свободно распространяемого пакета SPECFEM2D (<https://github.com/SPECFEM/specfem2d>). Во всех случаях в качестве r_0 (радиуса цилиндра – «граница штрека») бралась равной 2.5м. Во всех расчетах было 1300 приемников, расстояние между ними 0.2м, дискретизация по времени 10^{-4} с. При построении матрицы $U(f, k) = (u(f_i, k_j))$ использовались данные от 100 рядом стоящих приемников. И этим окном по приемникам пробежали весь профиль. Результат соотносили с точкой посередине окна. В представлении функционала (8) суммирование проводилось от 250гц до 800гц с шагом 10/3гц.

Для первого примера выберем однородную модель. Скорости в среде: $V_P=2800$ м/с, $V_S=1700$ м/с. На рис. 1 показана часть сейсмограммы.

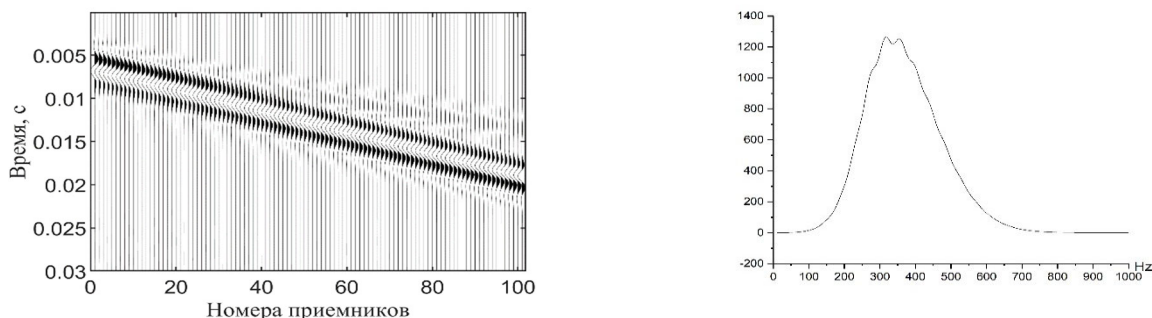


Рис. 1. Сейсмограмма и амплитудный спектр сейсмограммы

Результат минимизации функционала (8) следующий. Мы считали, что среда однородна. И минимум достигался при $V_S=1693\text{м/с}$. Само же поведение групповой скорости и матрицы U отражено на следующем графике.

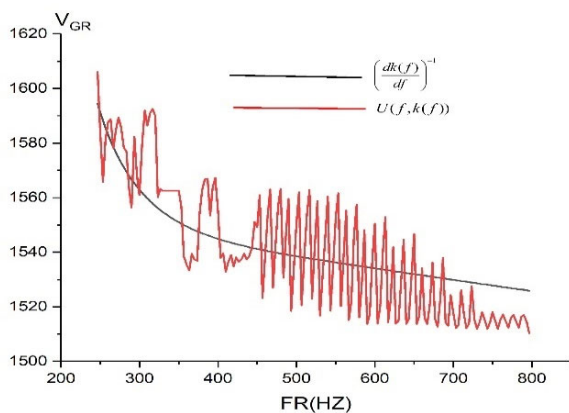


Рис. 2. Поведение компонент функционала (8) в точке минимума

Несколько пояснений к графику. «Пилообразность» функции $U(f, k(f))$ является следствием того, что минимум функции (3) искался с определенным шагом. Относительная разность же этих двух величин не более 5%. Заметим, что функционал (8) в принципе не может быть равен нулю (дисперсия поверхностных волн существует).

2 Слоисто-неоднородная среда.

В качестве второго примера мы возьмем среду, данные для расчета прямой задачи которой и сейсмограмма представлены на следующем рисунке. Амплитудный спектр мы не приводим, он также имеет 400Гц несущей частотой.

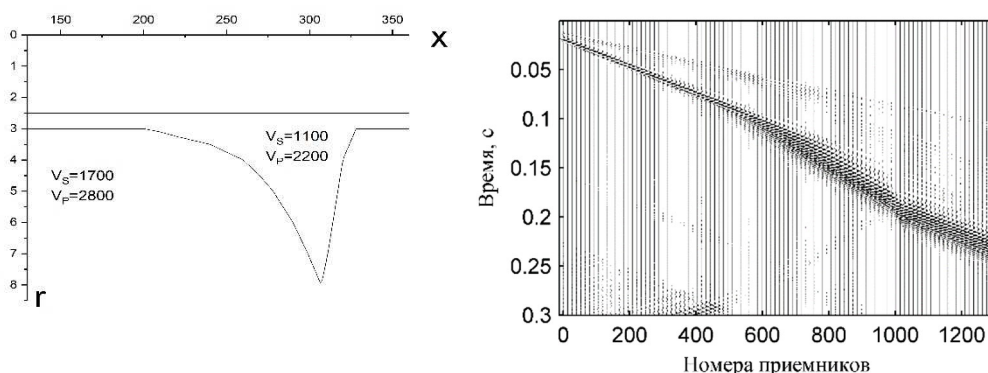


Рис. 3. Модель среды и сейсмограмма

Как говорилось ранее, обработка сейсмограммы шла в скользящем окне, захватывая сто трасс. После окно сдвигалось на метр и опять производилась мини-

мизация функционала (8). Результаты привязывались к точке, расположенной в середине окна. Для минимизации функционала мы выбрали двуслойную модель. Начальные данные, с которых стартовала минимизация, брались из результатов минимизации на предыдущем шаге. Мы приведем два результата. Это линия раздела среды и обобщающий параметр среды вблизи границы. А именно, мы приведем среднюю скорость волны V_S под данной точкой до глубины, составляющей 0.9 от длины волны, движущейся с этой средней скоростью, на несущей частоте сигнала. В нашем случае это 400гц.

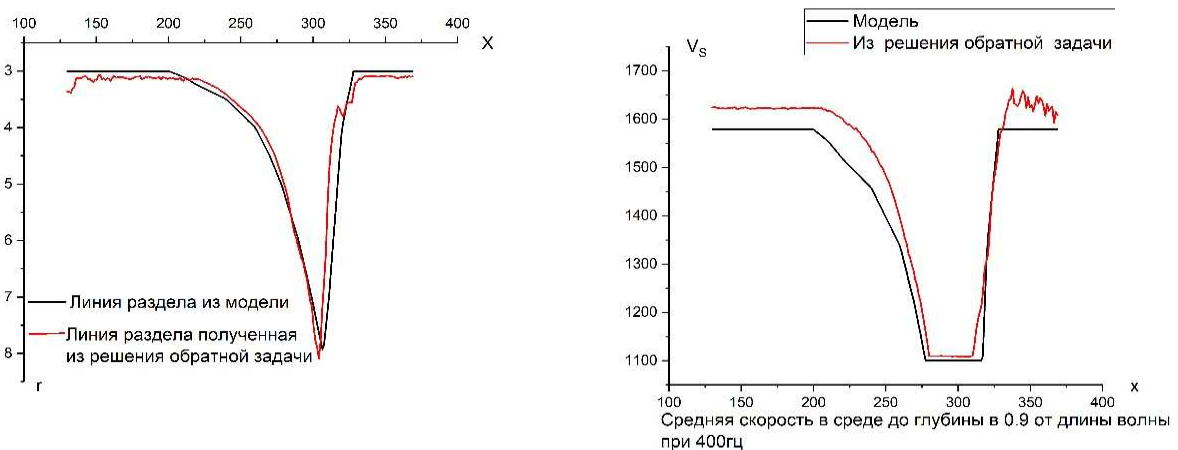


Рис.4. Результаты обработки сейсмограммы из рис. 3

Также, для иллюстрации приведем графики групповой скорости и матрицы $U(f, k(f))$ вычисленных в точке 260м на профиле. А также графики групповых (V_{GR}) и фазовых (V_{PH}) скоростей, полученных из решения обратной задачи и из модели. Под последним мы понимаем фазовые и групповые скорости, полученные в среде, параметры которой совпадают с параметрами модели строго под точкой наблюдения.

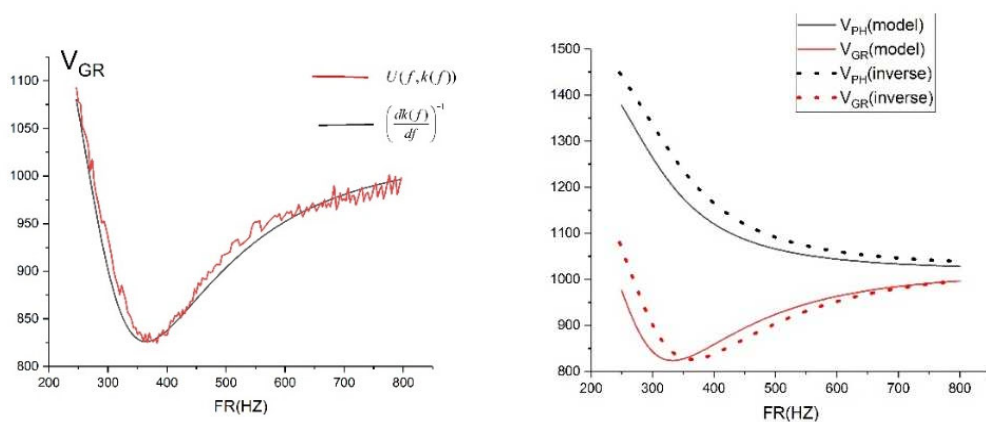


Рис. 5 Поведение компонент функционала (8) в точке минимума и сравнение данных, полученных из решения обратной задачи с аналитическими.

Заключение

Если мы хотим получить параметры поверхностных волн, не располагая приемниками, используемыми в сейсмологии, на достаточно редкой сети приемников, мы с необходимостью приходим к использованию того или иного варианта многоканальной обработке сейсмограмм, по типу S-преобразования. Обычно, в обратных задачах сейсмологии нахождение линий раздела слоев – достаточно неустойчивая процедура. Оказывается, что при минимизации использованного в статье функционала, линии раздела определяются четче, чем скорости. Это позволяет надеяться на то, что применение данного подхода при комплексной обработке сейсмограмм позволит лучше определить структуру среды вблизи свободной границы.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проекта НИР (номер государственной регистрации 121052500138-4, код (шифр) научной темы FWNZ-2021-0001)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курленя М. В., Сказка В. В., Азаров А. В., Сердюков А. С., Патутин А. В. Использование поверхностных волн для мониторинга состояния пород вокруг горных выработок и сооружений // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2022. — № 6. — С. 3—14. DOI: 10.15372/FTPRPI20220601.
2. Сказка В. В., Курленя М. В. Азаров А. В., Сердюков А. С. Локация неоднородностей в окрестности горной выработки по фазовой скорости поверхностной сейсмической волны, Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №5 стр. 3-11, 2024г, DOI: [10.15372/FTPRPI20240501](https://doi.org/10.15372/FTPRPI20240501)
3. Stockwell, R. G., L. Mansinha, and R. Lowe Localization of the complex spectrum: The S transform: IEEE Transactions on Signal Processing. — 1996. - V. 44. — P. 998–1001. doi: 10.1109/78.492555
4. Askari, R., and R. J. Ferguson, 2012, Dispersion and the dissipative characteristics of surface waves in the generalized S-transform domain: Geophysics, 77. - No. 1. - V11–V20. doi: 10.1190/geo2010-0330.1
5. Serdyukov A. S., Yablokov A. V., Duchkov A. A, Azarov A.V., Baranov V.D. Slant f - k transform of multichannel seismic surface wave data. // Geophysics. 2019.- Vol. 84. - No. 1 - P. a19–a24. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0430.1>

© В. В. Сказка, А. С. Сердюков, А. В. Азаров, 2025