

Е. Б. Сибиряков^{1,2}✉

Построение гладких ядер для решения краевых задач смешанного типа для уравнения Гельмгольца

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

²Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В работе теоретически обоснованы возможности определения свойств среды по данным сейсмических (или акустических) измерений, использующих независимое измерение нагрузок и перемещений. В качестве аналогии упругой среды использовались краевые задачи для двумерных уравнений Гельмгольца. Для плоского слоя на полупространстве получено аналитическое решение краевых задач. В случае гладкой криволинейной границы раздела предложено использовать новый метод решения краевых задач стационарных колебаний путём сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений с гладкими ядрами. Спектральное разложение этих ядер приводит к системе линейных уравнений с низким числом обусловленности. Показано, что новый метод позволяет находить решения краевых задач, в том числе смешанного типа, с высокой точностью и достоверностью.

Ключевые слова: краевые задачи, граничные интегральные уравнения, отражение от границы раздела, коэффициентные обратные задачи, дифракция

Е. Б. Sibiriakov^{1,2}✉

The using of boundary element method with smooth kernels for the elastic stationary oscillations boundary value problems

¹IPGG SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

²SibSUTIS, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Abstract. In the paper the possibilities of determining the properties of a medium by seismic (or acoustic) measurements, using independent measurements of traction vector and displacements are presented. Boundary value problems for 2D Helmholtz equations were used as an analogy for an elastic medium. An analytical solution of boundary value problems for the case of plane layer on a half-space was obtained. In the case of a curved interface, it was proposed to use a new method for solving boundary value problems of stationary oscillations by reducing the boundary value problem to a system of integral equations with smooth kernels. Spectral decomposition of these kernels leads to a system of linear equations with a low condition number. It was shown that the new solution method allows finding solutions of boundary value problems, including mixed type ones, with high accuracy and reliability.

Keywords: boundary value problems, boundary integral equations, reflection from the interface, coefficient inverse problems, diffraction

Введение

Решение прямых краевых задач упругих стационарных колебаний используется для нахождения решений коэффициентных обратных задач как в геофизике, так и в задачах механики деформируемого твёрдого тела и акустики. При этом обычно предполагается, что источником волн является импульсный источник, на верхней свободной поверхности используются только перемещения, а сама коэффициентная обратная задача в классической постановке является некорректной [1]. Например, идеи, лежащие в основе AVO – AVA (Amplitude Versus Offset, Amplitude Versus Angle) используют зависимость амплитуды от удаления на первичных сейсмограммах до суммирования [2]. Границы применимости этого метода оказались не столь широки, как ожидалось первоначально. В том числе и потому, что необходимо выделять волны (действуя в рамках лучевого приближения), изначальная амплитуда которых при отражении от границы раздела неизвестна. Мысль о том, чтобы рассматривать перемещения как отклик на нагрузку для определения свойств среды не нова. В [3] результаты предполагаемых независимых измерений нагрузок и перемещений на верхней поверхности было предложено использовать для нахождения свойств слоистой среды, используя обобщённый принцип взаимности. Идея не получила широкого распространения по-видимому, по причине сложности алгоритма и отсутствия простых и наглядных аналитических решений. В [4] была решена задача о восстановлении конфигурации полостей в рамках статической упруго-пластической модели.

В любом случае для решения обратных задач необходимо использовать решения прямых задач и сравнивать результаты с некоторым эталоном. Будем рассматривать краевые задачи для плоского уравнения Гельмгольца как аналог задач упругих стационарных колебаний. При этом функция на верхней поверхности считается известной, а аналогом функции источника колебаний будет заданная на верхней границе нормальная производная от функции. Она является величиной измеряемой и тоже считается известной. Сравнивая вычисления с измерениями, можно попытаться определить свойства среды. Проблема может заключаться в том, что возбуждение колебаний далеко не всегда является линейным и упругим процессом, поэтому при практическом применении этого метода может потребоваться пересчёт для эффективной излучающей упругой поверхности, в данной работе ограничимся простой моделью. Сначала рассмотрим краевую задачу, связанную с плоским слоем на полупространства. В случае плоских границ раздела возможно получить аналитическое решение, выражающую отклик среды на внешней поверхности на аналог нагрузки. В случае криволинейных границ раздела будем решать задачу численно с помощью модифицированного метода граничных элементов, используя гладкие и ограниченные про модулю ядра.

Плоский слой на полупространстве

Найдём решение двумерного уравнения Гельмгольца в среде, где на верхней поверхности задана какая-либо нагрузка, толщина плоского слоя h , в слое параметр $k = k_{up}$, в полупространстве, соответственно $k = k_{down}$:

$$\varphi_{zz} + \varphi_{xx} + k^2 \varphi = 0 ; \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, x) = p(x); \quad (1)$$

При этом необходимо найти функцию на поверхности $\varphi(0, x)$, как отклик среды с граничными условиями на аналог нагрузки $p(x)$. Граничные условия – непрерывность на границе, а также свойство, связанное с нормальной производной на границе:

$$\rho^{up} C^{up} \frac{\partial \varphi^{up}}{\partial z}(h, x) = \rho^{down} C^{down} \frac{\partial \varphi^{down}}{\partial z}(h, x) \quad (2),$$

куда в качестве независимого параметра входит ещё и плотность среды. Напомню, что обратная эффективная пространственная длина волны, а также скорость и частота связаны соотношением $k = \frac{\omega}{c}$. Для определённости, не уменьшая общности алгоритма, будем считать, что плотность на границе раздела меняется не существенно и будем использовать условие (2) в виде:

$$k_{down} \frac{\partial \varphi^{up}}{\partial z}(h, x) = k_{up} \frac{\partial \varphi^{down}}{\partial z}(h, x) \quad (3).$$

Зададим источник поля на поверхности. Пусть аналог вектора нагрузки на верхней поверхности ($z = 0$) задан формулой (4), а также представлен на рис. 1:

$$p(x) = -20x \times \exp(-10x^2) \quad (4)$$

Нагрузка на свободной поверхности, как правило, локализована и является управляемым параметром. Поскольку она локализована, можно провести её интервальное разложение на интервале измерений, и вычислить аналитически функцию во всём сегменте объёма, а, значит, и на верхней поверхности, удовлетворив всем граничным условиям. Пусть интервал, в котором проводятся измерения, находится в промежутке $x \in [-\pi; \pi]$. Функция, удовлетворяющая уравнению (1), может быть представлена на этом интервале в виде:

$$\varphi(0, x) = \sum_{n=0}^N \hat{\varphi}_{ic} \cos(nx) + \sum_{n=1}^N \hat{\varphi}_{is} \sin(nx) \quad (5).$$

В дальнейшем положим параметр N равным 40, что обеспечит заведомо достаточную точность. Найдя зависимость коэффициентов $\hat{\varphi}_{ic}, \hat{\varphi}_{is}$ от переменной z , вычислим функцию в данном сегменте пространства. Чтобы удовлетворять уравнению, упомянутые выше коэффициенты будут зависеть от двух констант, которые следует выбрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Введём обозначения: $v_{up} = \sqrt{|n^2 - k_{up}^2|}$, $v_{down} = \sqrt{|n^2 - k_{down}^2|}$, функция в слое $\varphi(z, x) = \varphi^{up}(z, x)$, в полупространстве $\varphi(z, x) = \varphi^{down}(z, x)$. Например, при $z \geq 0$, $v_{up} \neq 0$ коэффициенты $\hat{\varphi}_{is}$ будут равны:

$$\hat{\varphi}_{is}^{up} = \begin{cases} C_{1s}^{up} ch(v_{up}z) - C_{2s}^{up} sh(v_{up}z), n > k_{up} \\ C_{1s}^{up} cos(v_{up}z) - C_{2s}^{up} sin(v_{up}z), n < k_{up} \end{cases} \quad (6),$$

для нижнего слоя аналогично, только верхний индекс будет другим (*down*).

Поскольку $\frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial z} = p(x)$ известно, а нагрузку на поверхности (поскольку она локализована) можно разложить на интервале

$$p(x) = \sum_{n=0}^N \hat{p}_{ic} \cos(nx) + \sum_{n=1}^N \hat{p}_{is} \sin(nx) \quad (7),$$

то коэффициент C_{2s}^{up} можно найти сразу:

$$C_{2s}^{up} = -\frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}} \quad (8)$$

Таким образом, искомая функция на верхней поверхности будет определяться коэффициентом C_{1s}^{up} . В частности, в полупространстве $C_{1s}^{up} = \frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}}$, $\hat{\varphi}_{is}^{up}(0) = \frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}}$.

Предлагаю в дальнейшем отношение этих коэффициентов называть коэффициентом отклика, в отличие от общепринятого коэффициента отражения. Ибо отражения может и вовсе не быть, а отклик есть всегда. По этой причине данный параметр более информативен. В акустике среды могут называть более или менее жёсткими, сравнивая их импедансы. В связи с этим в зависимости от пространственной частоты интервального разложения n , можно называть среды мягкими, если $n < k$, иначе жёсткими. Теперь вычислим значения C_{1s}^{up} для плоского слоя на полупространстве. Будет четыре случая. Жёсткий слой на жёстком полупространстве, мягкий слой на жёстком полупространстве, жёсткий слой на мягком полупространстве и мягкий слой на мягком полупространстве. Когда нижнее полупространство жёсткое, то, например $C_{1s}^{down} = C_{2s}^{down}$, поскольку амплитуда должна быть ограничена и колебания не могут привести к разрушению полупространства. В случае равенства плотностей в первом случае ответ следующий:

$$\hat{\varphi}_{is}^{up}(0) = -\frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}} \left(\frac{v_{down} th(v_{up}h) + \frac{k_{down}}{k_{up}} v_{up}}{v_{down} + \frac{k_{down}}{k_{up}} v_{up} th(v_{up}h)} \right) \quad (9)$$

Аналогично вычисляются компоненты, связанные с разложениями по косинусам. В случае мягкого слоя на жёстком полупространстве ответ следующий:

$$\hat{\varphi}_{is}^{up}(0) = -\frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}} \left(\frac{v_{down} \operatorname{tg}(v_{up}h) + \frac{k_{down}}{k_{up}} v_{up}}{v_{down} - \frac{k_{down}}{k_{up}} v_{up} \operatorname{tg}(v_{up}h)} \right) \quad (10)$$

Из (10) видно, что амплитуда функции на верхней поверхности может быть равной бесконечности, что не удивительно. Мягкий слой на жёстком полупространстве может разрушиться на резонансных частотах, либо выйти за пределы упругости.

Случай, когда нижнее полупространство является мягким, то есть затухания амплитуды с глубиной нет, является более сложным, и, казалось бы, найти соотношения между C_{1s}^{down} и C_{2s}^{down} нельзя. Нужны какие-то дополнительные условия, так как неизвестных коэффициентов больше, чем условий. На самом деле можно. Следует использовать два условия. Первое. Коэффициенты ограничены. То есть разрушить полупространство, да ещё и периодически, нельзя. Второе при равных параметрах k сверху и снизу коэффициент отклика будет таким же, как и в полупространстве. Для случая жёсткого слоя на мягком полупространстве получается, что неизбежно $C_{1s}^{down} = C_{2s}^{down}$, и ответ будет совпадать с (9). Для мягкого слоя на мягком полупространстве, используя свойства матрицы поворота для коэффициентов получается следующий коэффициент отклика:

$$\hat{\varphi}_{is}^{up}(0) = -\frac{\hat{p}_{is}}{v_{up}} \left(\frac{v_{up} \cos^2(v_{up}h) + v_{down} \sin^2(v_{up}h) + (v_{down} - v_{up}) \sin(v_{up}h) \cos(v_{up}h)}{v_{down} \cos^2(v_{up}h) + v_{up} \sin^2(v_{up}h) + (v_{down} - v_{up}) \sin(v_{up}h) \cos(v_{up}h)} \right) \quad (11)$$

Как видим, знаменатель в ноль не обращается, а в случае одинаковых характеристик коэффициент отклика такой же, как и в полупространстве. В качестве иллюстрации представим на рис. 2 отклик жёсткого ($k_{up} = 0.1$, $h = 0.5$) слоя на мягком ($k_{down} = 10.5$) полупространстве (в виде перемещений на верхней поверхности) на нагрузку, представленную на рис. 1. Таким образом, задача о нахождении отклика слоя на полупространстве на нагрузку решена аналитически. Можно аналогичным образом построить точное решение и в случае нескольких слоёв.

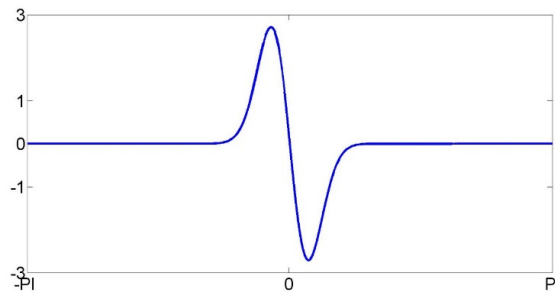


Рис. 1. Нормальная производная функции на внешней поверхности

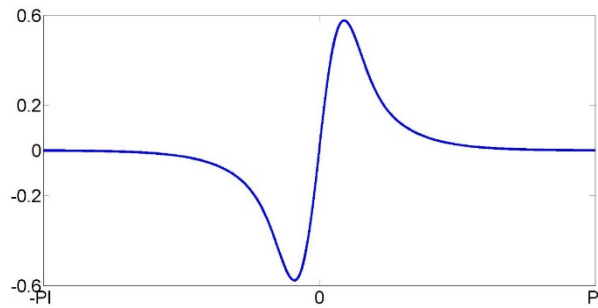


Рис. 2. Отклик жёсткого слоя на мягком полупространстве на нагрузку ($k_{up} = 0.1, k_{down} = 10.5, h = 0.5$)

Полученные точные решения дают возможность при независимом измерении нагрузок и перемещений на верхней поверхности определять толщину слоя и его акустические параметры, а также параметры полупространства, причём не только в лучевой области, но и в случае достаточно длинных волн по сравнению с толщиной слоя (дифракция), что может быть использовано не только в сейсморазведке, но также в акустике и биомедицине. Кроме того, предложенный алгоритм решения позволяет объяснить различие доминирующих пространственных частот поперечных, продольных и обменных волн и линейную зависимость затухания от частоты. Поскольку у продольных волн больше скорость, меньше параметр k . При $n > k$ затухание пропорционально первой степени частоты. Слабее всего затухают пространственные частоты, у которых $n \sim k$. При смене типа волны пространственные частоты с наименьшим затуханием смещаются. Декремент при этом остаётся примерно постоянным.

Криволинейный слой на полупространстве

Для того, чтобы понять возможность нахождения свойств среды в случае достаточно длинных волн, рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе, но с малоамплитудной криволинейной границей, изображённой на рис. 3 и представленной уравнением (12):

$$g(x) = -0.5 + 0.1 \times \exp(-5x^2) \quad (12)$$

В случае криволинейной границы раздела для нахождения функции на верхней границе будем численно решать краевую задачу методом граничных элементов, принимая во внимание, что в отличие от (2) производную нужно будет брать не по вертикальной координате, а по нормали в фиксированной точке. Для того, чтобы определить возможности определения свойств слоёв, чья толщина меньше длины волны, возьмём следующие параметры: $k_{up} = 2.5, k_{down} = 4.5$, чтобы на части пространственных частот среды были бы мягкими, на части – жёсткими. Построим финитные гладкие ядра аналогично и будем искать решение для потенциалов на поверхностях аналогично изложенному в [6]. В случае криволинейного слоя на полупространстве имеется три поверхности. Решение ищется мето-

дом неопределённых коэффициентов (коллокации), т.е. в фиксированных точках, количество которых совпадает с количеством коэффициентов разложения система решается точно. Несмотря на то, что формально эта задача считается некорректной, число обусловленности в том случае, когда на всех поверхностях, например, заданы нагрузки, число обусловленности матрицы линейной системы, к которой сводится краевая задача при выбранном количестве членов разложения, $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 1.5$, в случае задачи смешанного типа, к которой относится рассматриваемая, $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 150$.

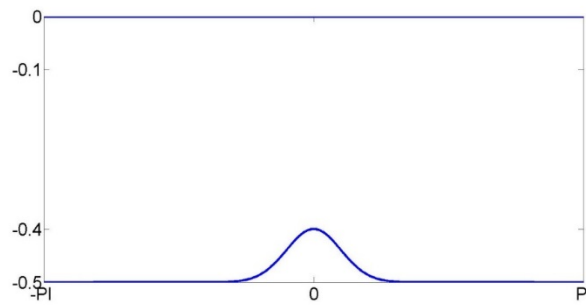


Рис. 3. Криволинейная граница раздела, описываемая уравнением (12) и верхняя граница

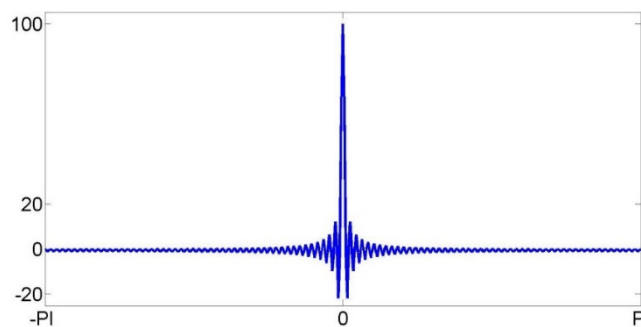


Рис. 4. Конечный аналог дельта-функции при значении переменной $GP(x, 0)$

Поскольку число обусловленности с увеличением количества точек коллокации растёт не очень быстро, есть основания предполагать, что этот метод также может быть использован в дальнейшем и для решения трёхмерных краевых задач. Результаты вычислений представлены на рис. 5 и 6. Сравнение точного решения для плоской границы раздела с численным показывает удовлетворительную точность. Кроме того, рис. 6 показывает возможность детектировать малоамплитудную криволинейную границу, характерный размер которой существенно меньше пространственной длины волны.

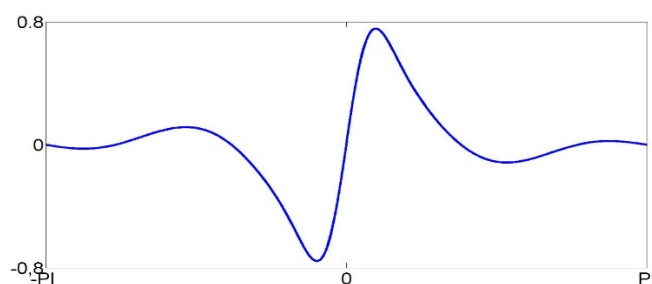


Рис. 5. Функция на верхней поверхности в случае плоской границы раздела

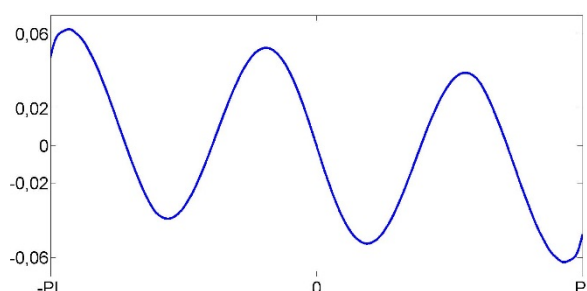


Рис. 6. Разность между функциями на границе раздела в случаях плоской и малоамплитудной криволинейной границами раздела

Заключение

В работе теоретически обоснованы возможности определения свойств среды по данным сейсмических (или акустических) измерений, использующих независимое измерение нагрузок и перемещений. В качестве аналогии упругой среды использовались задачи для двухмерных уравнений Гельмгольца. Для плоского слоя на полупространстве получено аналитическое решение краевых задач, позволяющие определять свойства слоя и полупространства путём сравнения аналога нагрузки и отклика на неё. В случае криволинейной границы раздела предложено использовать новый метод решения краевых задач стационарных колебаний путём сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений с гладкими ядрами. Спектральное разложение этих ядер приводит к системе линейных уравнений с низким числом обусловленности. Таким образом, новый метод решения позволяет находить решения краевых задач, в том числе смешанного типа, с высокой степенью точности и достоверности.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИНГГ СО РАН, при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWZZ-2022-0017).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009, 457 с.

2. Разин А.В., Меркулов В.П., Чернов С.А. Применение геофизики при изучении месторождений нефти и газа. Томск: Центр профессиональной переподготовки специалистов нефтегазового дела. ТПУ, 204. – 332 с.

3. Ватульян А.О., Гукасян Л.С., Недин Р.Д. // О задачи Коши в теории коэффициентных обратных задач для упругих тел // Владикавказский математический журнал. – 2016, Т.18, Выпуск 2, С. 31-40.

4. А. И. Чанышев, И. М. Абдулин, О. А. Лукьяшко. Определение НДС поверхности тела или её участка в случае идеальной пластичности при заданных векторах напряжений и смещений // ГЕО-СИБИРЬ, Т. 2 «Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки полезных ископаемых. Экономика. Геоэкология» // Новосибирск, СГУГиТ, 2020, С. 201-209.

5. Сибиряков Е.Б. Использование метода граничных элементов с гладкими ядрами для решения граничных задач упругих стационарных колебаний. Интерэкспо ГЕО-Сибирь - XIX Международный научный конгресс. Международная научная конференция "Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Экономика. Геоэкология": Сборник материалов в 8 т. (г. Новосибирск, 17-19 мая 2023 г.) – СГУГиТ – Новосибирск – том Т. 2 – № 3 – С. 276-284 – 2023

6. Е.Б. Сибиряков. О детектировании шероховатых границ. Физическая мезомеханика, Т.20, №6, Томск, 2017, с.98-104

© Е. Б. Сибиряков, 2025