

Е. Н. Шер¹✉

Расчет в двумерной постановке задачи внедрения клина в хрупкую среду с учетом развития магистральной трещины

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт горного дела им. Н. А. Чинакала» СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: ensher@gmail.com

Аннотация. Разработана схема получения аналитического решения в рамках двумерной постановки упругой задачи определения сопротивления внедрению жесткого клина в хрупкую среду с учетом развития магистральной трещины. Подтверждена ее работоспособность сравнением расчетов с данными, полученными в экспериментах по ударному разрушению клином пластин из оргстекла. Проведено сравнение теоретических зависимостей сопротивления внедрению жесткого клина в хрупкую среду и размера магистральных трещин от величины внедрения, полученных в двумерной и трехмерной постановках задачи. Показано, что решение, полученное в двумерной постановке при малых значениях внедрения клина уточняет расчет, предложенный для определения силы внедрения клина в упругое полупространство. Такое решение может использоваться так же для теоретической оценки развития трещин при взрыве удлиненных зарядов в хрупкой горной породе.

Ключевые слова: внедрение клина, горные породы, двумерный расчет, сопротивление внедрению, коэффициент жесткости, магистральная трещина

E. N. Sher¹✉

Calculation in a two-dimensional formulation of the problem of wedge penetration into a brittle medium taking into account the development of the main crack

¹Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: ensher@gmail.com

Abstract. A scheme for obtaining an analytical solution within the framework of a two-dimensional formulation of an elastic problem of determining the resistance to the introduction of a rigid wedge into a brittle medium, taking into account the development of a main crack, has been developed. Its operability has been confirmed by comparing the calculations with the data obtained in experiments on the impact destruction of organic glass plates by a wedge. A comparison of the theoretical dependencies of the resistance to the penetration of a rigid wedge into a brittle medium and the size of the main cracks on the penetration value obtained in two-dimensional and three-dimensional formulations of the problem has been carried out. It is shown that the solution obtained in a two-dimensional formulation for small values of wedge penetration refines the calculation proposed for determining the wedge penetration force into an elastic half-space. Such a solution can also be used for theoretical evaluation of crack development during the explosion of elongated charges in brittle rock.

Keywords: Wedge penetration, rocks, two-dimensional calculation, penetration resistance, stiffness coefficient, main crack

Введение

Актуальным для совершенствования технологий ударного разрушения горных пород является разработка расчетных методов оценки разрушающего действия ударного органа механизмов на породный массив. К настоящему времени на основе анализа большого объема экспериментальных исследований [1] выявлена качественная картина процесса разрушения при ударе жесткого клина по свободной границе твердой среды. Отмечается, что в начале внедрения клина возле линии контакта происходит образование зоны пластического течения. Образующаяся при этом в результате пластической деформации микротрещина перерастает в медианную трещину [2-4]. Дальнейшее увеличение нагрузки на клин приводит к ее устойчивому росту. Разрушающее действие клина подробно исследовано в плоской постановке задачи о взаимодействии клина и хрупкой горной породы в [5]. В этой работе с использованием аппарата механики трещин разработаны расчетные модели определения параметров развивающейся магистральной трещины при внедрении падающего массивного клина и динамики его движения. В [6] рассмотрена в трехмерной постановке задача о внедрении клина с ограниченной шириной лезвия в упругое полупространство нормально к его поверхности. Рассчитана форма образующейся плоской трещины, имеющая вид полуовала, описанного вокруг кромки внедряющегося клина. Аналогичный результат получен при экспериментальном моделировании на образцах из оргстекла. В [7] разработана расчетная схема внедрения клиновидного индентера в упругую среду, позволяющая определять зависимость коэффициента жесткости породы при внедрении клина от геометрических его параметров и механических свойств породы. В этой работе внедрения клина в упругую среду моделируется раскрытием в упругом пространстве плоской дислокационной площадки размерами, определяемыми шириной клина $2b$ и заглублением h , и площадью $S_0 = 4bh$. Анализ численного решения трехмерной задачи о раскрытии такой площадки, сопровождающейся развитием плоской трещины со свободными берегами, окружающей ее, показал, что такое решение достаточно близко к аналитическому решению задачи о раскрытии дисковой трещины, нагруженной в ее центре на круглой площадке площадью S_0 . На основе этого решения были построены приближенные формулы, определяющие силу внедрения клина и размер магистральной трещины при заданном внедрении клина, его геометрии и механических свойств среды. Такие приближенные соотношения были построены в предположении, что размер магистральной трещины по форме близкой к круговой заметно больше поперечного размера клина $2b$. Для определения силы сопротивления клина внедрению на начальном этапе, когда размер магистральной трещины соизмерим или меньше ширины клина целесообразно рассмотреть задачу о внедрении клина в двумерной постановке. Такая постановка рассмотрена в настоящей работе.

Постановка модельной задачи о внедрении клина в упругое полупространство в двумерной постановке.

На рис. 1а изображен схематично клин с углом заострения 2α , внедряющийся в нижнюю полуплоскость на глубину h . В результате внедрения клина в нижней полуплоскости вдоль оси y образуется трещина длиной a . Клин внедря-

ется под действием вертикальной силы F . Такое нагружение приводит к силовому воздействию на берега трещин в зонах контакта с клином. Внедрение клина приводит к раздвижению берегов образовавшейся трещины. В настоящей работе с учетом того, что заглубление клина h значительно меньше размера a магистральной трещины, приближенно принимается, что развитие магистральной трещины происходит под действием дислокационного раскрытия ее берегов на прямолинейном участке, примыкающем к свободной поверхности длиной h , равной глубине внедрения клина (рис.1б). Раскрытие на этом участке принимается постоянным по его длине и равным среднему раскрытию, определяемому геометрией внедряющегося клина $d = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

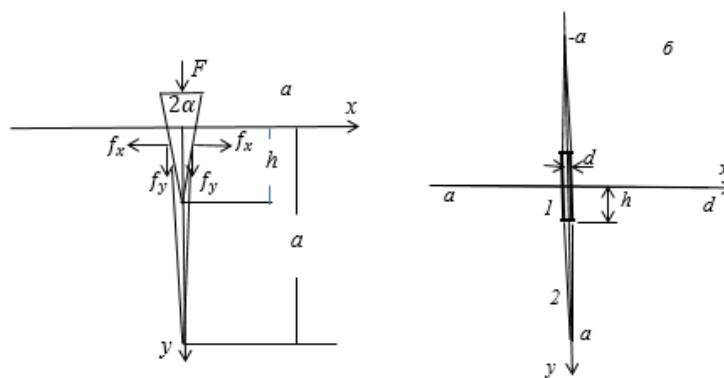


Рис. 1. Схема воздействия внедряющегося клина на упругую полуплоскость (а) и постановка задачи расчета развития трещины 2 при раскрытии дислокационной площадки 1, моделирующей внедрение клина с учетом свободной поверхности (б)

Учет свободной поверхности в данной работе в расчете взаимодействия клина с упругой средой проводится упрощенно, в предположении, обоснованном в [8], что приближенно влияние свободной поверхности при развитии трещины в плоскости перпендикулярной ей может быть учтено при решении симметризованной задачи, схема которой приведена на рис.1б. По этой схеме рассматривается развитие вертикальной трещины в упругой плоскости под действием раскрытия центрально расположенного дислокационного разрыва длиной $2h$.

Близким к решению задачи о развитии плоской трещины при расширении в упругой плоскости дислокационного разрыва является решение задачи о равновесном развитии трещины, расположенной вдоль оси x при нагружении ее берегов давлением p на центрально расположенном интервале оси x длиной $2a_0 = 2h$. В последней задаче для трещины длиной $2a$ известно значение коэффициента интенсивности поля напряжений (КИН) возле ее кромок:

$$K_I = \frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \arcsin\left(\frac{a_0}{a}\right) \quad (1)$$

Это соотношение можно использовать для определения работы и объема раскрытия трещины на интервале нагружения при $|x| < a_0$. Согласно Ирвину, удельная энергия $\frac{1}{2} \frac{dW}{da}$, выделяющаяся при симметричном увеличении длины трещины связана с КИН энергетическим соотношением:

$$K_I^2 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{dW}{da}, \text{ где } W - \text{упругая энергия единичного слоя пространства}$$

с нагруженной двухмерной трещиной

Отсюда для потенциальной упругой энергии W получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dW}{da} = \frac{8p^2 a(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\arcsin\left(\frac{a_0}{a}\right) \right]^2,$$

которое, после замены переменной $a = a_0 / \sin(\varphi)$, удастся проинтегрировать:

$$W = C a_0^2 p^2 \left[\frac{\varphi^2}{2 \sin^2(\varphi)} + \varphi \operatorname{ctg}(\varphi) - \ln(\sin(\varphi)) \right], C = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае трещины, нагруженной на интервале $2a_0$ давлением p : $W = pV/2$, где V - объем раскрытия трещины на интервале нагружения. Через объем среднее раскрытие трещины d на интервале нагружения определяется соотношением: $d = V/(2a_0)$, отсюда и из уравнения (2) можно получить выражение для определения равновесного давления p через среднее раскрытие дислокационного разрыва, его длину и длину трещины:

$$p = \frac{d}{a_0 C} \left[\frac{\varphi^2}{2 \sin^2(\varphi)} + \varphi \operatorname{ctg}(\varphi) - \ln(\sin(\varphi)) \right]^{-1}, \quad (3)$$

Второе уравнение для определения давления p следует из уравнения (1):

$$p = \frac{\sqrt{\pi} K_{IC} \sqrt{\sin(\varphi)}}{2\varphi \sqrt{a_0}} = \frac{D}{\sqrt{a_0}} \frac{\sqrt{\sin(\varphi)}}{\varphi}, \quad D = \frac{\sqrt{\pi} K_{IC}}{2} \quad (4)$$

Исключая давление p из соотношений (1), (3) получаем уравнение для определения φ и соответственно a , через раскрытие дислокационного разрыва d при заданной его длине $2a_0$ и констант среды.

$$\frac{d}{C D \sqrt{a_0}} = \left[\frac{\varphi^2}{2 \sin(\varphi)^2} + \varphi \operatorname{ctg}(\varphi) - \ln(\sin(\varphi)) \right] \left[\frac{\sqrt{\sin(\varphi)}}{\varphi} \right] \quad (5)$$

Расчеты по этому уравнению проводились для приближенного описания внедрения клина с углом заострения 30° на глубину h в пластину из оргстекла. для которого принимались значения модуля Юнга $E = 3 \cdot 10^9$ Па, коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$, критического коэффициента интенсивности напряжений среды $K_{IC} = 10^6$ Па $\cdot$ м $^{1/2}$. В этом случае применительно к уравнению (5) имеем $a_0 = h$, $d = h \sin(\alpha)$, $\varphi = \arcsin(h/a)$, где α - половина угла заострения клина. В результате решения уравнения (5) для $h = 1 \div 10$ мм определялись значения φ . По формуле $a = a_0 / \sin(\varphi)$ и формулам (4) рассчитывались зависимости размера равновесной трещины $a(h)$ и $p(h)$. Графики $a(h)$ приведены на рис.2а кривой 1.

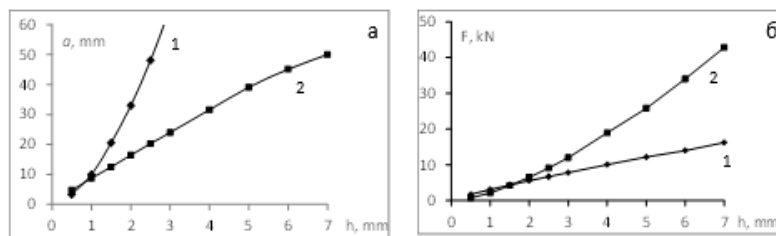


Рис.2 Зависимости максимального размера трещины a и силы, действующей на клин при его внедрении F , от глубины внедрения клина

Сила F , действующая на клин при его внедрении в плоский слой упругого полупространства толщиной b , определялась в предположении взаимодействия граней клина с контактными площадками среды по закону сухого трения согласно соотношениям [7]:

$$F(h) = 2f_x k(\alpha, \mu), \quad k(\alpha, \mu) = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu \sin(\alpha)} \quad (6)$$

Здесь $f_x = bhp(h)$ – горизонтальная сила раскрытия дислокационной площадки (рис.1а), соответствующей внедряемому клину, μ – коэффициент трения пары клин – среда, принимаемый в расчетах равным 0.3, $b = 2.8$ см – толщина плоского слоя упругого полупространства, применительно к разрушению которого рассчитана сила F . Рассчитанный по (6) график $F(h)$ приведен на рис.2б. кривой 1.

Было проведено сравнения полученных данных с результатами расчетов, проведенных по методике работы [7], зависимостей максимального размера трещины и силы, действующей на клин при его внедрении, от глубины внедрения клина, при решении в трехмерной постановке задачи о равновесном внедрении клина в упругое полупространство. Такие зависимости приведены на рис.2 а, б кривыми 2. В трехмерных расчетах предполагалось, что ширина клина составляет $b = 2.8$

см, что соответствует расчету в двухмерной постановке. Все остальные параметры задач также принимались равными. Из сравнения графиков рис.2а следует, что рост размера магистральной трещины с увеличением глубины внедрения клина в плоском случае деформирования среды, например при раскалывании пластины, значительно больше, чем в пространственном случае при внедрении клина в полупространство. Близкие значения размера трещин в этих задачах наблюдаются при $h \leq 1 \text{ мм}$. Количественное соотношение в значении сил расклинивания в случае пластины и полупространства (рис.2б) обратное. На начальном этапе внедрения при $h \leq 1.5 \text{ мм}$ сила, необходимая для внедрения клина в пластину больше, чем требуется в пространственном случае, но с дальнейшим ростом заглубления, такая сила растет значительно медленнее требуемой в пространственном случае. Как было отмечено ранее, аналитическое решение [7], полученное в пространственном случае предполагает, что форма трещины близка к круговой. Это возможно, когда максимальный радиус трещины равен или больше половины ширины клина. В наших расчетах в пространственном случае такой размер $a = 14 \text{ мм}$ согласно рис.2а получается при $h \approx 1.5 \text{ мм}$, что близко к точке равенства значений кривых 1 и 2 на рис.2б. На основании этого можно предполагать, что до $h \approx 1.5 \text{ мм}$ сопротивление внедрению в пространственном случае определяется кривой 1 на рис.2б, а при большем заглублении кривой 2. Для уточнения этого перехода требуются более точные расчеты и экспериментальная проверка.

Экспериментальная проверка приведенного в настоящей статье расчета в двумерной постановке внедрения клина в хрупкую среду с учетом развития магистральной трещины проводилась расклиниванием пластин из оргстекла. В экспериментах использовался струнный гравитационный копер. В опытах определялась динамика внедрения падающего массивного клина на одну из четырех граней квадратной пластины из оргстекла толщинами 10 и 20 мм и размером 100*100 мм. Сила сопротивления внедрению определялась с помощью акселерометра, установленного на клине. Пример осциллограммы сигнала акселерометра, полученной при ударе клина по торцу пластины приведен на рис.3а. Полученные данные о силе, соответствующей максимальному значению ускорения клина, и размере образующейся магистральной трещины сравнивались с теоретическими оценками этих величин. Расчетные зависимости, связывающие размер трещины и значение силы внедрения клина проведены на рис.3б кривыми 1 и 2, соответствующими расчетам для пластины и полупространства.

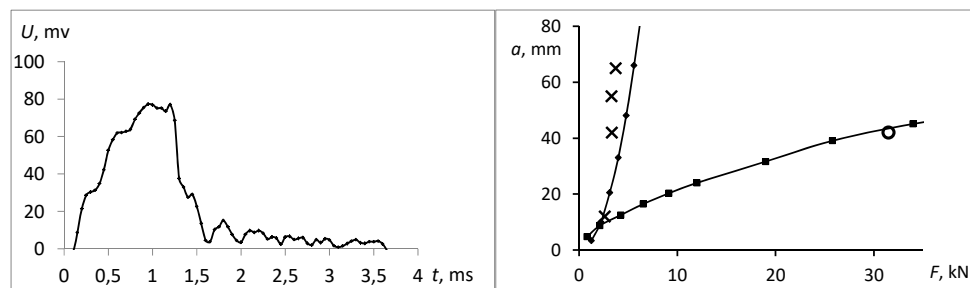


Рис.3 Зависимости, связывающие размер магистральной трещины a и силы F , действующей на клин при его внедрении, полученные при решении в двухмерной и трехмерной постановках задач о внедрении клина в упругую среду - кривые 1 и 2 соответственно.

Данные экспериментов по ударному внедрению клина в пластины приведены на рис.3б крестиками. Видно, что экспериментальные данные находятся вблизи теоретической зависимости (кривая 1), полученной при решении задачи о внедрении клина в двухмерной постановке, и подтверждают ее качественно. Количественное отклонение по величине силы данных эксперимента и расчета не превышает 30%.

Более точное соответствие эксперимента и теории при разработке расчетных схем процесса внедрения клиновидного инструмента в хрупкие горные породы было получено в работе [11], где проводилось на сервогидравлическом прессе Инстрон 8802 статическое внедрение клина в объемный образец из оргстекла. Полученные в таком эксперименте максимальные значения силы внедрения и размер образовавшейся трещины приведены на рис.3б маркером в виде кружка на кривой 2, соответствующей решению задачи о внедрении клина в трехмерной постановке. Параметры клина, использованного в этом эксперименте также соответствовали принятым в расчетах. Видно, что экспериментальные и расчетные данные совпадают с хорошей точностью

Обсуждение

В настоящей работе разработана схема получения аналитического решения в рамках двухмерной постановки упругой задачи определения сопротивления внедрению жесткого клина в хрупкую среду с учетом развития магистральной трещины. Расчетная схема основана на приближенном описании воздействия клина на упругую среду при его внедрении. Такое внедрение моделируется раскрытием дислокационной площадки, примыкающей ортогонально к границе упругой полуплоскости на глубину внедрения клина h с раскрытием, определяемым углом его заострения. Напряженное состояние находится приближенно из решения симметризованной относительно свободной поверхности задачи о развитии прямолинейной трещины, нагруженной на отрезке длиной $2h$ в ее центре постоянным давлением p . Расчетами показано, что полученное решение дополняет найденное ранее приближенное аналитическое решение [7] задачи о внедрении клина с шириной режущей кромки $2b$ в упругое полупространство при малых значениях внедрения: $h \leq b$.

Отметим здесь, что аналогичный подход при определении разрушающего действия взрыва в хрупких горных породах применяется в задаче об оценке формы и размеров возникающих при взрыве удлиненных зарядов ВВ радиальных трещин. На начальном этапе действия взрыва происходит дробление породы в зоне радиуса b вблизи заряда и ее осесимметричное расширение. Такое расширение приводит к развитию радиальных трещин во внешнем упругом массиве горных пород. При расчете размеров трещин в [12] расширение массива моделируется раскрытием начальной радиальной системы трещин прямоугольной формы радиуса b и длиной, совпадающей с длиной заряда. Раскрытие трещин определяется давлением газов продуктов взрыва. В работе [12] с использованием такой методики был проведен в трехмерной постановке расчет формы и размеров трещин, возникающих при контурном взрывании зарядов. Показано, что в случае, когда окончательный размер

трещин меньше длины заряда, решение задачи в двухмерной постановке дает удовлетворительное совпадения с данными численного расчета в трехмерной постановке. В этом случае полученное аналитическое решение задачи в двухмерной постановке может улучшить точность расчетов при проектировании буровзрывных работ.

Заключение

В представленной работе получено аналитическое решение в рамках двухмерной постановки упругой задачи определения сопротивления внедрению жесткого клина в хрупкую среду с учетом развития магистральной трещины. Сравнением расчетов с данными, полученными в экспериментах по ударному разрушению клином пластин из оргстекла, подтверждена работоспособность полученного решения. Показано, что решение, полученное в двухмерной постановке при малых значениях внедрения клина уточняет расчет, предложенный для определения силы внедрения клина в упругое полупространство.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и образования РФ (№ гос. регистрации 124020700085-5).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колесников Ю. В., Морозов Е. М. Механика контактного разрушения. — М.: ЛКИ, 2010. — 224 с.
2. Maurer W. C. and Rinehart J. S. Impact crater formation in rock, J. Appl. Phys., 1960, Vol. 31, No. 7. — P. 1247.
3. Paul B. and Sikarskie D. A preliminary theory on static penetration by a ridge wedge into brittle rock material, Transaction of SME-AIME, Dec. 1965. — P. 372 – 383.
4. Башеев Г. В., Ефимов В. В., Мартынюк П. А. Расчетная модель разрушения горных пород клиновидным ударным инструментом // ФТПРПИ. — 1999. — № 5. — С. 53 – 61.
5. Башеев Г. В. Расчетная модель откола куска горной породы при ударе клином под уступ // ФТПРПИ. — 2004. — № 5. — С. 77 – 89.
6. Шер Е. Н., Ефимов В. П. Трехмерное моделирование развития трещины в твердом теле при внедрении жесткого клина // ФТПРПИ. — 2015. — № 6. — С. 43 – 48.
7. Шер Е.Н. Численная оценка сопротивления внедрению клиновидного инструмента в хрупкий породный массив с учетом равновесного развития магистральной трещины // ФТПРПИ. — 2021. — №6
8. Шер Е.Н. Учет влияния свободной поверхности породного массива при моделировании развития трещин при взрыве, ударе и гидроразрыве. // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. –2023г–Т.10, №1– С–107–114
9. Г.П. Черепанов Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974.– 640 с.
10. Разрушение, под редакцией Г.Либовиц, Том 2 Математические основы теории разрушения М: Издательство Мир, 1975.
11. Шер Е.Н. Физическое моделирование внедрения клиновидных инденторов в горные породы в статических и динамических экспериментах // 2024г.–ФТПРПИ, –№6–С.30-39.
12. Шер Е.Н. Моделирование разрушения горных пород сближенными шпуровыми зарядами при контурном взрывании.//ФТПРПИ,–2023.–№5–С.70-78.

© Е. Н. Шер, 2025