

В. Ф. Канушин¹, Д. Н. Голдобин¹, Н. Н. Кобелева^{1✉}, И. А. Инжеватов¹

Сравнительный анализ методов определения вертикальных градиентов аномалий силы тяжести до третьего порядка

¹Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

Аннотация. Несмотря на активное развитие методов интерпретации гравиметрических данных, проблема точного вычисления вертикальных градиентов аномалий силы тяжести (ВГАСТ) до настоящего времени остается нерешенной в полной мере. Отсутствует единый подход к выбору метода расчета градиентов в зависимости от конкретной геолого-геофизической задачи. Это обуславливает необходимость проведения комплексного сравнительного анализа существующих методов с целью выявления их применимости и эффективности. Такой анализ представляет собой важную задачу, как с теоретической, так и с прикладной точек зрения и способствует развитию более точных и надёжных инструментов гравirazведки, а также для решения задачи Молоденского, основанной на аналитическом продолжении с помощью обращенного ряда Тейлора. В статье проведен сравнительный анализ результатов ВГАСТ вплоть до третьего порядка, полученных методом численного дифференцирования аномалий силы тяжести со значениями вертикальных градиентов аномалий силы тяжести, вычисленных методом разложения в ряд по сферическим функциям, в котором использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, до 2190 степени и порядка. Показано, что метод вычисления ВГАСТ, основанный на использовании формул численного дифференцирования аномалий силы тяжести, не уступает по точности аналитическому методу с помощью разложения в ряд по сферическим функциям.

Ключевые слова: численное дифференцирование, глобальная модель аномалии силы тяжести, вертикальный градиент аномалий силы тяжести, сферические функции, гармонические коэффициенты геопотенциала

V. F. Kanushin¹, D. N. Goldobin¹, N. N. Kobeleva^{1✉}, I. A. Inzhevatov¹

Comparative analysis of methods for determining vertical gradients of gravity anomalies up to third order

¹Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

Abstract. Despite the active development of gravimetric data interpretation methods, the problem of accurate calculation of vertical gradients of gravity anomalies (VGAST) remains unsolved to date. There is no unified approach to the choice of gradient calculation method depending on the specific geological and geophysical problem. This necessitates a comprehensive comparative analysis of existing methods in order to determine their applicability and efficiency. Such an analysis is an important task from both theoretical and applied points of view and contributes to the development of more accurate and reliable tools for gravity exploration, as well as for the solution of the Molodensky problem based on the analytical continuation using the inverse Taylor series. In the article a comparative analysis of the results of VGAST up to the third order, obtained by the method of numerical differentiation of gravity anomalies with the values of vertical gradients of gravity anomalies, calculated by the method of expansion in a series of spherical functions, in which the set of harmonic coefficients of the global geopotential model EIGEN-6C4, up to 2190 degree and order, is used. It is shown that the method of calculation of VGAST, based on the use of formulas of numerical differentiation of gravity anomalies, does not lose in accuracy to the analytical method with the help of expansion in a series of spherical functions.

lated by the method of expansion in series by spherical functions, in which a set of harmonic coefficients of the global geopotential model EIGEN-6C4 is used, up to 2190 degree and order. It is shown that the method of calculating the VGAST, based on the use of formulas for numerical differentiation of gravity anomalies, is not inferior in accuracy to the analytical method using the spherical function series expansion.

Keywords: numerical differentiation, global gravity anomaly model, vertical gradient of gravity anomalies, spherical functions, harmonic coefficients of geopotential

Введение

Проблема определения вертикального градиента аномалий силы тяжести обладает высокой практической значимостью, как в гравиметрии, так и в геодезии. Использование ВГАСТ существенно расширяет интерпретационные возможности гравиметрической съёмки [1]. Кроме того, вертикальные градиенты аномалий силы тяжести входят в формулы для вычисления поправочных членов теории Молоденского [2, 3].

Современная практика определения вертикальных градиентов основывается на различных методах, включая численное дифференцирование, спектральные преобразования и аналитические выражения, полученные из решений прямой задачи гравиметрии. Однако каждый из этих методов имеет ограничения, связанные с точностью, устойчивостью к шумам и особенностями применяемых алгоритмов.

К настоящему времени разработаны различные методы вычисления ВГАСТ [3, 4–7], в которых учитывается реальная физическая поверхность Земли и оценивается влияние наклонов местности.

Цель данного исследования – провести сравнительный анализ вычисления вертикальных производных аномалий силы тяжести включительно до третьего порядка двумя разными методами:

1. Вычисление вертикальных градиентов аномалий силы тяжести ВГАСТ методом численного дифференцирования на плоскости;
2. Вычисление радиальных градиентов аномалий силы тяжести (РГАСТ) на сфере с помощью разложения в ряд по сферическим функциям с учетом гармонических коэффициентов геопотенциала EIGEN-6C4 до степени 2190.

Методы и материалы

При получении числовых значений ВГАСТ по заданному распределению аномалий силы тяжести Δg обычно используются различные схемы вычислений, вытекающие из формулы Нумерова [8], которая имеет следующий вид

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} da \int_0^{\infty} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^2} dr, \quad (1)$$

где Δg_0 – аномалия силы тяжести в исследуемой точке; Δg – аномалия силы тяжести в текущей точке на плоскости; r , a ее полярные координаты; ось z направлена вертикально вниз.

Однако определение ВГАСТ на физической поверхности Земли по аномалиям силы тяжести (АСТ), заданным на ее поверхности, с помощью формулы (1) возможно только в равнинных районах.

На рисунке 1 показаны модель рельефа Earth 2014 и глобальная модель аномалий силы тяжести в свободном воздухе.

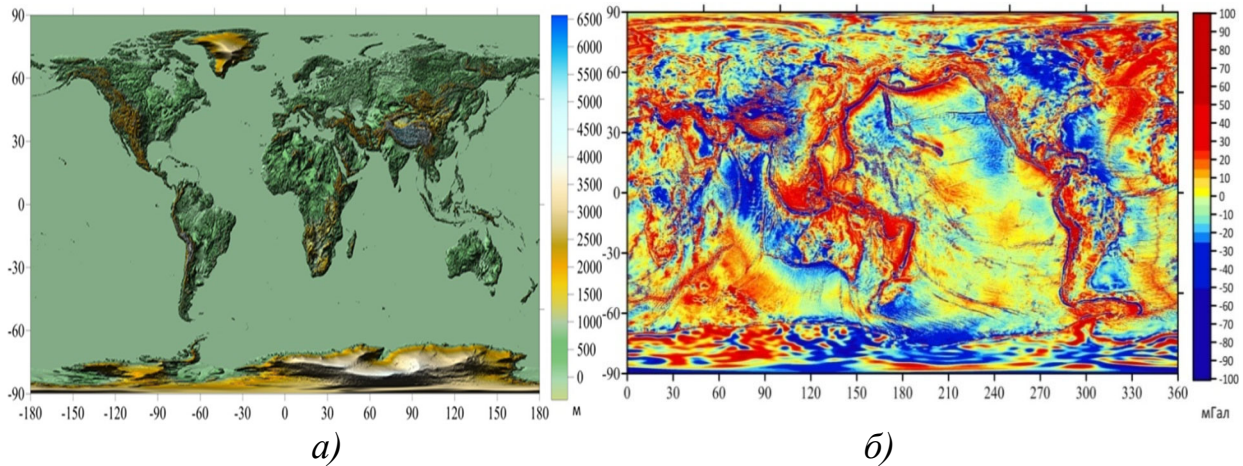


Рис. 1. Цифровые модели, используемы в исследовании: а) картосхема рельефа Earth 2014, б) картосхема аномалий силы тяжести в свободном воздухе

Для вычисления ВГАСТ методом численного дифференцирования (формула (2)) [9] используется конечноразностная схема двухточечного шаблона численного дифференцирования, суть которого заключается в том, что на отсчетной плоскости ОХУ в начале прямоугольных координат $P(0,0,0)$ задана аномалия силы тяжести $\Delta g(0,0,0)$, дифференцируемая достаточное число раз,

$$\frac{\partial \Delta g(0,0,0)}{\partial z} \approx \frac{\Delta g(0,0,\Delta z) - \Delta g(0,0,0)}{\Delta z}. \quad (2)$$

Формула (3) предназначена для определения первого радиального градиента АСТ (производной первого порядка) методом разложения в ряд по сферическим функциям с учетом гармонических коэффициентов геопотенциала EIGEN-6C4 до степени 2190.

$$\frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} = \frac{fM}{r^3} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \right\} \quad (3)$$

На рисунке 2 представлены картосхемы вертикальной производной АСТ первого порядка, полученные разными методами.

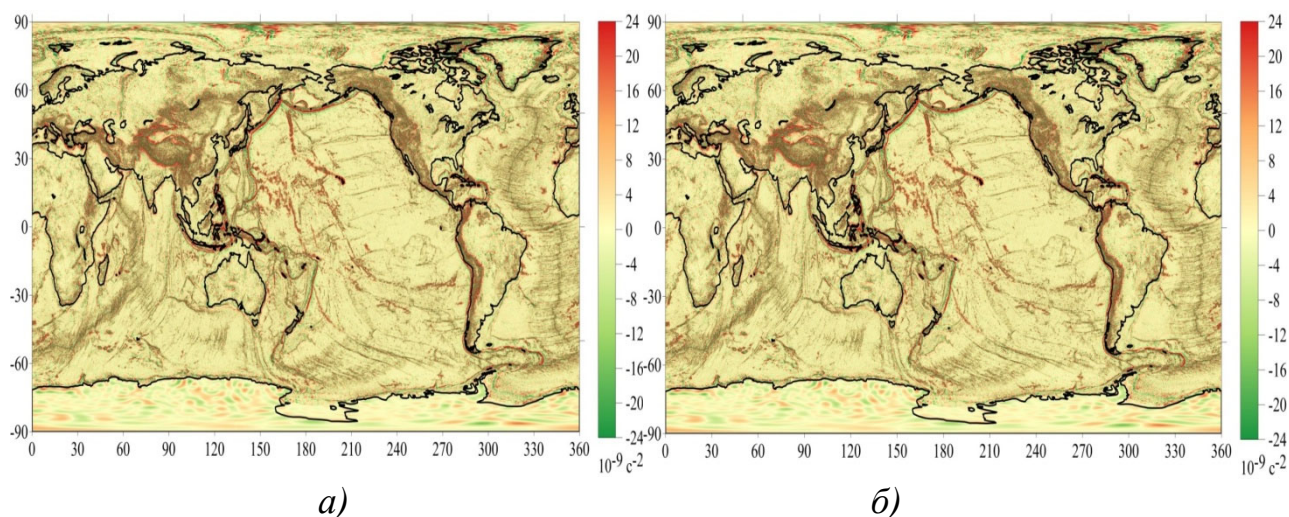


Рис. 2. Картограммы вертикальной производной АСТ первого порядка, полученные разными методами: а) ВГАСТ первого порядка (метод численного дифференцирования), б) РГАСТ первого порядка (метод разложения в ряд по сферическим функциям)

Картограмма распределения разности $\delta \left(\frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} \right)$ между методом численного дифференцирования по формуле (2) и методом разложения в ряд Фурье по формуле (3) изображена на рисунке 3.

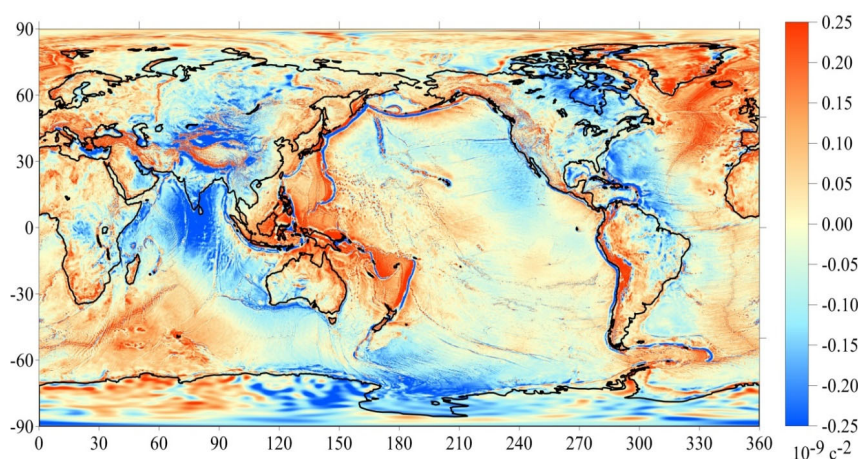


Рис. 3. Картограмма распределения разности Δg

Статистическая характеристика распределения значений $\delta \left(\frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} \right)$ на земной поверхности представлена в виде гистограммы, показанной на рисунке 4.

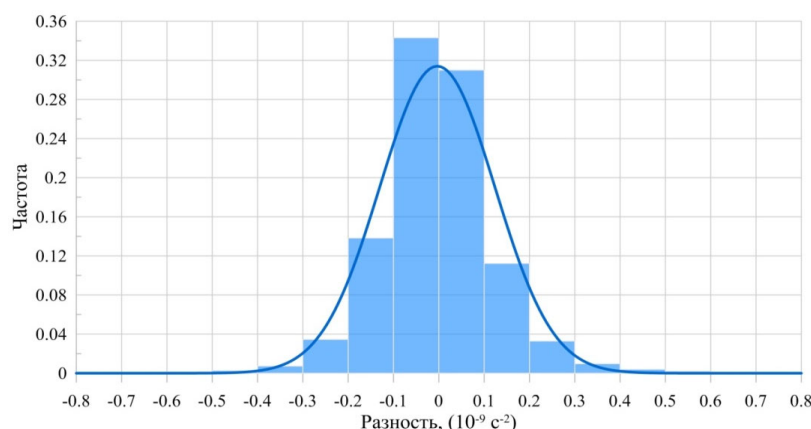


Рис. 4. Гистограмма распределения разности $\delta\left(\frac{\partial\Delta g(P)}{\partial r}\right)$

Приведенная на рисунке 4 гистограмма распределения Δg по характеру почти соответствует распределению Гаусса (т. е. нормальному распределению).

В таблице 1 представлены статистические характеристики распределения разности между методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье

Таблица 1

Статистические характеристики распределения разности $\delta\left(\frac{\partial\Delta g(P)}{\partial r}\right)$

Характеристики	Значения
Number of values	9331200
Minimum ($1 \cdot 10^{-9} c^{-2}$)	-1,47212
Maximum ($1 \cdot 10^{-9} c^{-2}$)	2,27346
Range ($1 \cdot 10^{-9} c^{-2}$)	3,745576
Mean ($1 \cdot 10^{-9} c^{-2}$)	-0,003
Standard deviation ($1 \cdot 10^{-9} c^{-2}$)	0,129494

Результаты вычислений показывают, что максимальное абсолютное значение разности $\left|\delta\left(\frac{\partial\Delta g(P)}{\partial r}\right)\right|$ равно $2,27 \cdot 10^{-9} c^{-2}$, среднее арифметическое значение этой разности равно $0,003 \cdot 10^{-9} c^{-2}$, а стандартное отклонение составляет $\sigma = 0,1295 \cdot 10^{-9} c^{-2}$. Таким образом, вычисленные с помощью разложения в ряд по сферическим функциям значения РГАСТ, практически не отличаются от значений ВГАСТ, вычисленных по формуле численного дифференцирования

Для вычисления второй вертикальной производной аномалии силы тяжести, используется конечноразностная схема трехточечного шаблона, в котором аномалии силы тяжести Δg расположены вдоль вертикальной оси OZ симметрично относительно результирующей точки $P(0,0,0)$ с шагом по высоте h , в интервале $[(0,0,-h)<(0,0,0)<(0,0,+h)]$.

В соответствии с этим шаблоном вторая вертикальная производная аномалий силы тяжести вычисляется как первая производная от первой производной по выражению 4

$$\frac{\partial^2 \Delta g(0,0,0)}{\partial z^2} = \frac{\Delta g(0,0,-h) - 2\Delta g(0,0,0) + \Delta g(0,0,+h)}{h^2}. \quad (4)$$

Формула для определения второго радиального градиента АСТ (производной второго порядка по радиусу вектору) методом разложения в ряд по сферическим функциям с учетом гармонических коэффициентов геопотенциала EIGEN-6C4 до степени 2190 имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2} = & \frac{fM}{r^3} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{mn}(\sin \varphi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Картосхемы второй вертикальной производной АСТ разными методами представлены на рисунке 5.

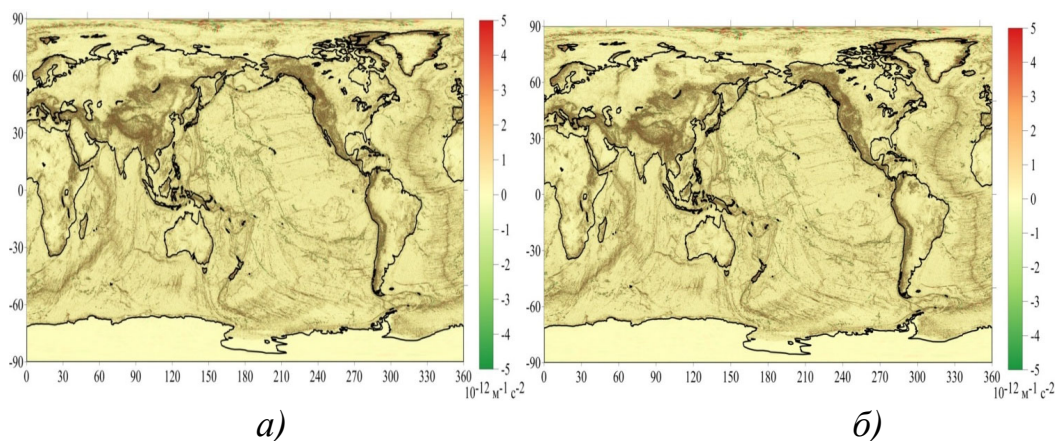


Рис.5. Картосхемы второй вертикальной производной АСТ разными методами: а) ВГАСТ второго порядка (метод численного дифференцирования), б) РГАСТ второго порядка (метод разложения в ряд по сферическим функциям)

Картосхема распределения разностей $\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$ между результатами,

полученными методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье, представлена на рисунке 6.

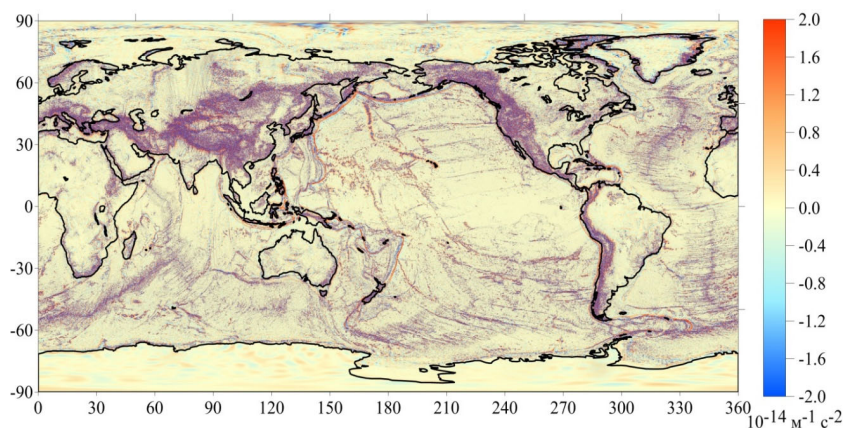


Рис. 6. Картосхема распределения разности $\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$ вторых производных между методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье

Статистические характеристики распределения разности производных второго порядка $-\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$, полученных методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье, представлены гистограммой распределения разности производных (рис. 7).

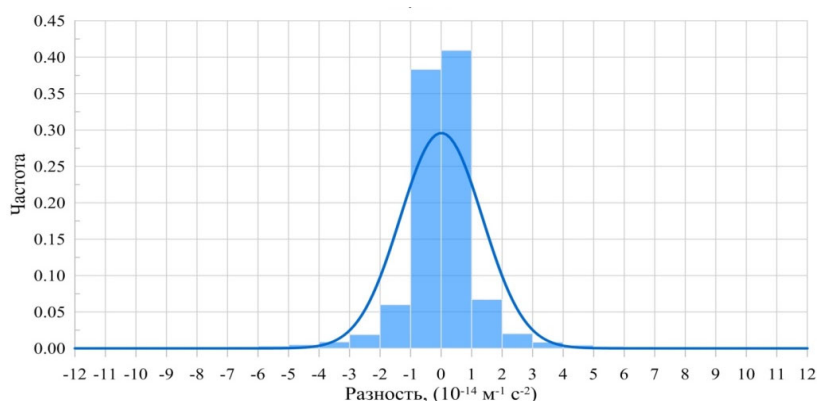


Рис. 7. Гистограмма распределения разности $\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$ производных второго порядка.

Статистические параметры распределения разности $\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$ производных второго порядка показаны в таблице 2.

Таблица 2

Статистические характеристики распределения разности Δg

Характеристики	Значения
Number of values	9331200
Minimum ($1 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-2} \text{с}^{-2}$)	-59,9961
Maximum ($1 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-2} \text{с}^{-2}$)	65,7178
Range ($1 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-2} \text{с}^{-2}$)	125,7139
Mean ($1 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-2} \text{с}^{-2}$)	0,005554
Standard deviation ($1 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-2} \text{с}^{-2}$)	1,523214

Результаты таблицы 2 показывают, что среднее арифметическое значение $\delta\left(\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}\right)$ этой разности равно $0,005554 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-1} \text{с}^{-2}$, а стандартное отклонение составляет $\sigma = 1,523214 \cdot 10^{-14} \text{м}^{-1} \text{с}^{-2}$. Таким образом, вычисленные с помощью разложения в ряд по сферическим функциям значения второй вертикальной радиальной производной аномалии силы тяжести, практически не отличаются от значений второй вертикальной производной аномалии силы тяжести, вычисленных по формуле численного дифференцирования.

Формула для вычисления третьей вертикальной производной аномалии силы тяжести (АСТ) методом численного дифференцирования основана на поэтапном подходе, при котором производная третьего порядка определяется как первая производная от ранее вычисленной второй производной. В расчётах применяется пятиточечная конечноразностная схема, выражение которой имеет следующий вид

$$\frac{\partial^3 \Delta g}{\partial z^3}(0,0,0) = \frac{\Delta g(0,0,+2h) - 2\Delta g(0,0,h) + 2\Delta g(0,0,-h) - \Delta g(0,0,-2h)}{2h^3}. \quad (6)$$

Аналитическое выражение для определения третьего радиального градиента АСТ (т.е. третьей производной по радиус-вектору) на основе разложения в ряд по сферическим функциям с учётом гармонических коэффициентов геопотенциала модели EIGEN-6C4 до степени 2190 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^3 \Delta g}{\partial r^3} = \frac{fM}{r^4} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+4} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \right\}. \quad (7)$$

Картосхемы вертикальных производных АСТ третьего порядка показаны на рисунке 8.

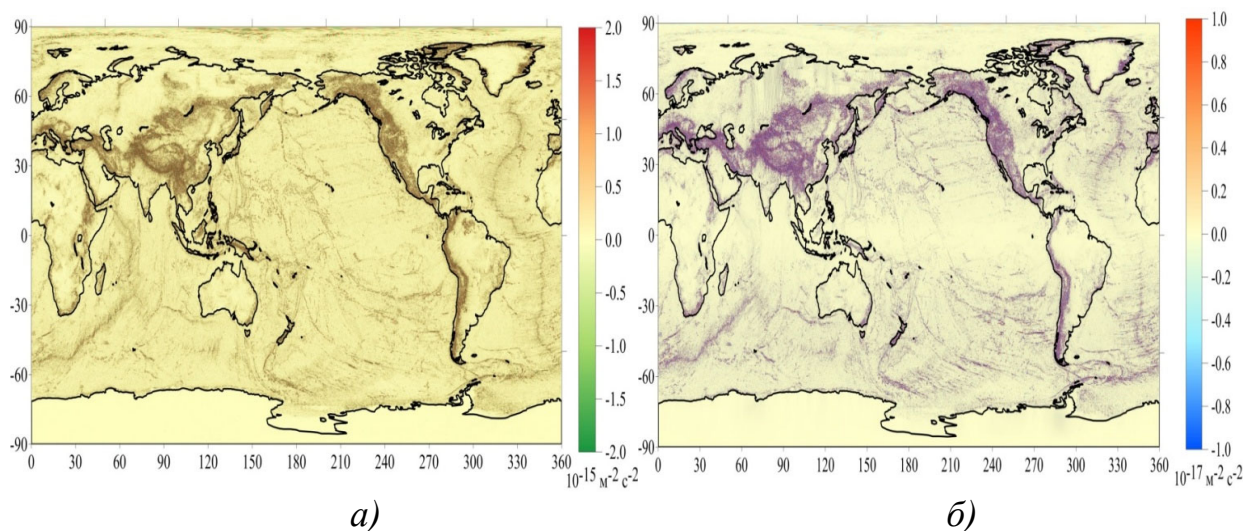


Рис.8. Картосхемы вертикальных производных АСТ третьего порядка. а) ВГАСТ третьего порядка (метод численного дифференцирования), б) РГАСТ третьего порядка (метод разложения в ряд по сферическим функциям)

Картосхема распределения разности разности $\delta \left(\frac{\partial^3 \Delta g(P)}{\partial r^3} \right)$ производных третьего порядка представлена на рисунке 9.

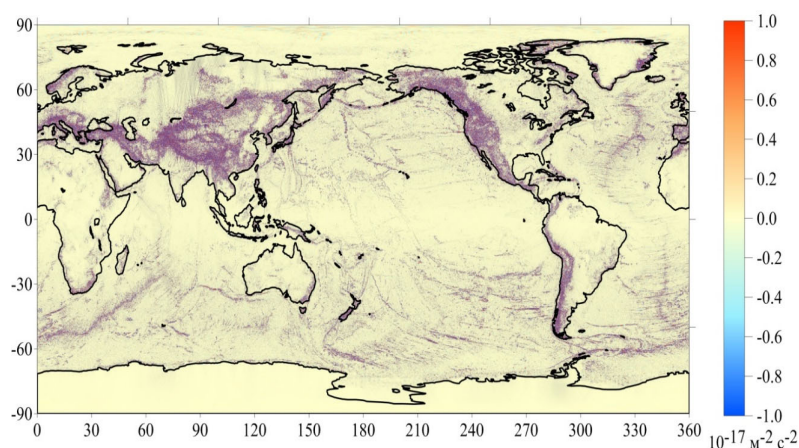


Рис. 9. Картосхема распределения разности Δg производных третьего порядка между методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье

Статистическая характеристика распределения значений $\delta\left(\frac{\partial^3 \Delta g(P)}{\partial r^3}\right)$ на земной поверхности представлена в виде гистограммы, показанной на рисунке 10.

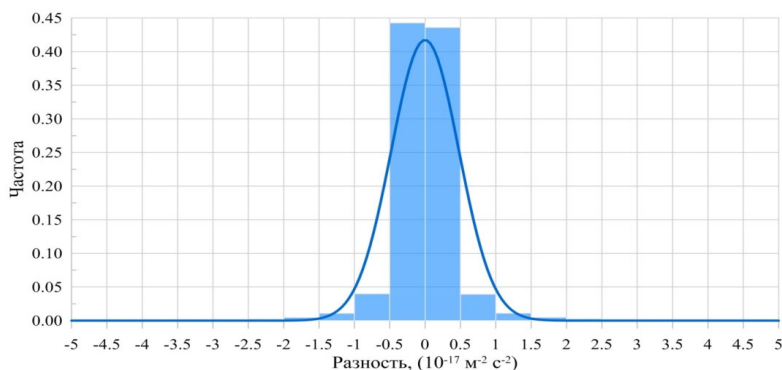


Рис. 7. Гистограмма распределения разности $\delta\left(\frac{\partial^3 \Delta g(P)}{\partial r^3}\right)$ третьих производных

Численные характеристики распределения разности $\delta\left(\frac{\partial^3 \Delta g(P)}{\partial r^3}\right)$ производных третьего порядка между методом численного дифференцирования и методом разложения в ряд Фурье приведены в таблице 3.

Таблица 3

Статистические характеристики распределения разности ΔG

Характеристики	Значения
Number of values	9331200
Minimum ($1 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$)	-24,8657
Maximum ($1 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$)	22,48084
Range ($1 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$)	47,34655
Mean ($1 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$)	-0,00092
Standard deviation ($1 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$)	0,536097

Среднее арифметическое значение этой разности равно $-0,00092 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$, стандартное отклонение составляет $\sigma = 1,536097 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}$. Таким образом, результаты определения вертикальной производной АСТ третьего порядка двумя методами, практически совпадают между собой.

Заключение

В результате сравнительного анализа двух различных методов вычисления вертикальных производных аномалий силы тяжести включительно до третьего порядка установлено их практическое совпадение. Однако, по затратам машинного времени процесс пересчета аномалий силы тяжести на более высокий уровень методом численного дифференцирования требует значительного объема вычислений.

Вычисление второй вертикальной производной аномалии силы тяжести методом численного дифференцирования, в котором используется конечноразностная схема трехточечного шаблона в 10 раз превосходит затраты времени по сравнению с методом, использующим разложение в ряд Фурье по системе сферических функций до 2190 степени и порядка.

Затраты машинного времени для вычисления производной третьего порядка методом численного дифференцирования составили около 60 часов. Вычисление третьей радиальной производной аномалий силы с учетом сферических гармоник глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до 2190 степени составили 10 часов. Поэтому для решения задачи М.С. Молоденского методом аналитического продолжения с экономической точки зрения предпочтительно вычисление второй и третьей вертикальной производной аномалий силы тяжести выполнять методом разложения в ряд по сферическим функциям.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках СЧ НИР «ГЕОТЕХ-КВАНТ - 3» с целью создания высокоточных моделей геопотенциального поля Земли и его характеристик на территории РФ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маловичко А.К., Костицин В.И., Тарунина О.Л. Детальная гравиразведка на нефть и газ. М., Недра, 1979. 190 с.
2. Пеллинен Л. П. Применение формул первого приближения для вычисления характеристик гравитационного поля Земли. «Тр. ЦНИИГАиК, 1965, вып.157, с.85-101.
3. Бернхард Гофман – Велленгоф, Гельмут Мориц «Физическая геодезия». – М.: МИИГАиК, 2007г. – 410с..
4. Юркина М И Вычисление первой и второй вертикальных производных силы тяжести по картам ее аномалий. Труды ЦНИИГАиК, 1965, вып.157, с. 116-124.
5. Картвелишвили К.М. К вопросу пересчета аномалии силы тяжести в аномалию вертикального градиента силы тяжести. Изв. АН СССР, сер. геофиз., №8, 1964, стр.1171-1177.
6. Остач О.М. Об определении вертикального градиента аномалий силы тяжести на физической поверхности Земли Труды ЦНИИГАиК, 1965, вып.176, стр. 44-53.
7. Мориц Г. Современная физическая геодезия. М.: 1983- 392 с.
8. Нумеров Б. В. Зависимость между местными аномалиями силы тяжести и производными от потенциала. ДАН СССР, 1929, А, №24. С. 101-105.
9. В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, И. А. Инжеватов, Определение вертикального градиента аномалий силы тяжести методом численного дифференцирования, Междунар. науч.-исслед. журн., 2024, выпуск 9, С. 1–15.

© В. Ф. Канушин, Д. Н. Голдобин, Н. Н. Кобелева, И. А. Инжеватов, 2025