УДК 532.543
DOI 10.33764/2618-981X-2024-4-1-197-203
*А. В. Хон*[1,2*]

# Моделирование скоростного поля руслового потока с произвольной формой поперечного сечения

[1]Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г.Томск, Российская Федерация
[2]Национальный Исследовательский Томский государственный университет, г.Томск, Российская Федерация
*e-mail: avkhon@yandex.ru

**Аннотация.** Необходимость учета различия в скоростях течения на различных глубинах при моделировании транспорта взвешенных наносов является актуальной задачей в мониторинге естественных и искусственных водотоков. Целью данного исследования является получение аналитической зависимости, описывающей распределение скоростей в русловом потоке в поперечном сечении произвольной формы. В работе представлена методика расчета скоростного поля в русловом потоке с произвольной формой поперечного сечения. Для получения окончательной формулы было принято допущение о пропорциональности коэффициента турбулентного обмена значению местной осредненной скорости. Таким образом, уравнение равномерного движения приняло вид уравнения Пуассона с постоянной правой частью. Для такого уравнения существует аналитическое решение. Таким решением является предложенная полиномиальная функция от двух пространственных координат. Приводятся результаты проверки методики на материале натурных измерений, проведённых в разных поперечных сечениях р.ПОлометь (Валдайская возвышенность). Установлено, что значения местной осредненной скорости, полученные путем расчета, обнаруживают хорошее соответствие натурным данным как вблизи динамической оси (область максимальных скоростей), так и вблизи твердых границ потока, где наблюдается их тормозящее влияние.

**Ключевые слова:** турбулентность, скорость течения, поперечное сечение руслового потока

*A.V. Khon*[1,2*]

**Modeling the velocity field of a channel flow with an arbitrary cross-sectional shape**

[1]Institute of Monitoring of Climatic and Ecological Systems SB RAS, Tomsk, Russian Federation
[2]National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
*e-mail: avkhon@yandex.ru

**Abstract.** The need to take into account differences in flow velocities at different depths when modeling suspended sediment transport is an urgent task in monitoring natural and artificial watercourses. The purpose of this study is to obtain an analytical relationship describing the distribution of velocities in a channel flow in a cross section of arbitrary shape. The paper presents a method for calculating the velocity field in a channel flow with an arbitrary cross-sectional shape. To obtain the final formula, the assumption was made that the turbulent exchange coefficient is proportional to the value of the local averaged velocity. Thus, the equation of uniform motion took the form of a Poisson equation with a constant right-hand side. There is an analytical solution for such an equation. Such a solution is the proposed polynomial function of two spatial coordinates. The results of testing the methodology on the material of field measurements carried out in different cross sections of the Polomet River (Valdai Upland) are presented. It has been established that the values of the local averaged velocity obtained by calculation show good agreement with the field data both near the dynamic axis (the region of maximum velocities) and near the solid boundaries of the flow, where their braking effect is observed.

**Keywords:** turbulence, flow velocity, channel flow cross-section

## *Введение*

Транспортирующая и размывающая способность руслового потока определяется величиной скорости течения в различных направлениях, а самой значительной является ее продольная составляющая. Скорость течения в естественном русловом потоке изменяется во всех основных направлениях: вдоль потока, по его глубине и ширине. Однако изменения эти не являются одинаково значимыми в различных условиях и при решении различных задач. В частности, при многократном превышении ширины потока над глубиной ставится задача установления скоростного поля в горизонтальной плоскости (изменение скорости по ширине и вдоль потока). Для описания таких потоков используется приближение «мелкой воды» позволяющее игнорировать изменение характеристик потока по глубине. Такая постановка задачи используется, например, при отражении влияния мезоформ донного рельефа на распределение осредненных скоростей и построения плана течений [1,2], а также при описании движения внутриводного льда [3]. Многократно встречается необходимость учета различия в скоростях течения на различных глубинах при моделировании транспорта взвешенных наносов. В этом случаепытаются использовать приближение плоского потока, в котором игнорируется изменение скорости по ширине потока. Различные модели эпюр скорости по глубине приводятся, в частности в работе Н.Б. Барышникова [4]. В условиях малых и средних водотоков, а также в прибрежных областях больших рек приходится одновременно учитывать тормозящее влияние как дна, так и береговых откосов и здесь работ значительно меньше [5,6]. Данная работа посвящается развитию именно этого направления, поскольку в отличии от современных методов расчета турбулентных течений здесь предпринята попытка получения аналитической зависимости, учитывающей не только вертикальный, но и поперечные градиенты.

## *Материалы и методы*

Случай установившегося равномерного движения характеризуется справедливостью ряда допущений. Предполагается медленное изменение продольной составляющей скорости течения вдоль потока и малая величина поперечных составляющих руслового потока. Такие условия могут наблюдаться как во всем поперечном сечении руслового потока, так и в его значительных областях. Поэтому, смысл использования свойств равномерного движения заключается в упрощении расчетов скоростей течения там, где это возможно. Таким образом, приходим к уравнению равномерного по длине движения, в котором турбулентность учитывается через коэффициент обмена между слоями [7, 8]. Этот коэффициент был принят нами пропорциональным местной продольной скорости, то есть ( $A = k \cdot v_x$ , $A_{cp} = k \cdot V$ ). Введение безразмерных величин и конкретизация формулы коэффициента турбулентного обмена приводит уравнение равномерного движения кследующему виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} = -2E , \qquad E = \frac{M \cdot C \cdot I \cdot H_{cmp}}{V_{cmp}^2} \qquad (1)$$

где $U = \tilde{v}^2$ ; $\tilde{y} = y / H_{cmp}$ , $\tilde{z} = z / H_{cmp}$ - соответственно поперечная и вертикальная координата точки в поперечном сечении потока отнесенная к глубине стрежневой вертикали; $\tilde{v} = v / V_{cmp}$ - величина местной скорости течения, отнесенной к средней скорости течения на стрежневой вертикали; $M = 0.7 \cdot C + 6$ ; С – коэффициент Шези.

То есть, течение в стрежневой области принимается нами как внешнее течение, а рассматриваемая и подлежащая расчету область как турбулентный пограничный слой, обусловленный торможением со стороны стенки.

На основании известных аналитических решений уравнения Лапласа [9], измененных таким образом, чтобы они одновременно удовлетворяли уравнению Пуассона с постоянной правой частью был предложен ряд полиномиальных зависимостей, из которых были выбраны те, которые в наибольшей степени отвечали имеющимся натурным данным. Выбор осуществлялся на основе измерений скоростей течения на реке Пoлометь (Валдайская возвышенность) в створе р. Полометь - с. Яжелбицы [10]. Приведенная здесь зависимость была повторно проверена на материалах измерения скоростей в другом поперечном сечении той же реки. Это поперечное сечение находится на выходе из излучины р. Полометь, включенной в экспериментальный участок по детальному исследованию гидравлики потока и изменения морфологии при искусственном спрямлении. Выбор водотока и участка определялся, в данном случае, высокой степенью его гидравлической изученности. Натурные исследования скоростного поля на различных участках излучины были проведены сотрудником Государственного гидрологического института В.А. Виноградовым [11].

### *Результаты и их обсуждение*

Наиболее удачным оказалось выражение [12]:

$$U(\tilde{y},\tilde{z}) = C_1(\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2) + C_2(3\tilde{z} \cdot \tilde{y}^2 - \tilde{z}^3) + C_3(\tilde{y} + \tilde{z}) - \frac{E}{2}(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) + U_1;$$

$$v = V_{cmp} \cdot \sqrt{|U(\tilde{y},\tilde{z})|} , \qquad (2)$$

Постоянные $C_1, C_2$ и $C_3$ определяются путем решения системы уравнений:

$$\tilde{z}_{cmp}^2 C_1 + \tilde{z}_{cmp}^3 C_2 + \tilde{z}_{cmp} C_3 = U_2 - U_1 + 0.5E \cdot \tilde{z}_{cmp}^2 ;$$

$$\tilde{b}^2 C_1 + \tilde{b} C_3 = U_3 - U_1 + 0.5 E \tilde{b}^2 ; \qquad (3)$$

$$(\tilde{d}^2 - \tilde{h}_d^2) C_1 + (3\tilde{d}^2 \tilde{h}_d - \tilde{h}_d^3) C_2 + (\tilde{d} + \tilde{h}_d) C_3 = U_4 - U_1 + \frac{E}{2} \cdot (\tilde{d}^2 + \tilde{h}_d^2).$$

$\tilde{z}_{cmp}$ - безразмерное значение вертикальной координаты точки на стрежневой вертикали, в которой измеряется придонная скорость. Эта величина должна быть по возможности близкой к единице.

$\tilde{b} = b / H_{cmp}$ - безразмерное расстояние от стрежневой вертикали до берега по поверхности, нормированное на глубину стрежневой вертикали.

$\tilde{d}$ - безразмерное горизонтальное расстояние от осевой вертикали до берега по дну русла (в случае отсутствия или невыраженности перегиба линии смоченного периметра при переходе от дна к береговому склону эту величину можно принять равной половине расстояния до берега по поверхности); $\tilde{h}_d$ - безразмерное значение глубины потока на расстоянии $\tilde{d}$ от стрежня; $U(0,0) = U_1$– квадрат безразмерной поверхностной скорости на стрежне;$U(0,\tilde{z}_{cmp}) = U_2$ – квадрат безразмерной придонной скорости на стрежне;$U\left(\tilde{b},0\right) = U_3$- квадрат безразмерной скорости на поверхности вблизи берега; $U_4$– квадрат безразмерной величины скорости течения в точке ($\tilde{d}$ ,$\tilde{h}_d$).

Необходимые исходные данные, значения постоянных в формуле (2) и значения средних отклонений приведены в таблице 1.

*Таблица 1*

Параметры поперечных сечений и результаты расчетов

| створ рекиПолометь | с.Яжелбицы | с.Зеленый Бор | |
|---|---|---|---|
| Характеристики поперечного сечения и результаты расчета | | Слева от оси | Справа от оси |
| Исходные данные | | | |
| Уклон водной поверхности, I | 0.00019 | 0.00147 | 0.00147 |
| коэффициент Шези C , м$^{1/2}$/с, | 71.44 | 19,6 | 19,6 |
| Расстояние по поверхности от осевой вертикали до берега b, м | 4,84 | | 10 |
| Расстояние по дну от осевой вертикали до берега d, м | 1.98 | | 3.33 |
| глубина потока на осевой вертикали $H_{стр}$, м | 0,66 | 3 | 3 |
| Глубина потока на расстоянии d от осевой вертикали$h_d$, м | 0,66 | 3 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| поверхностная скорость потока на его динамической оси $v_1$, м/с | 0,96 | 1,5 | 1,5 |
| придонная скорость потока на осевой вертикали $v_2$ , м/с | 0,65 | 0,8 | 0,8 |
| скорость течения на поверхности потока у берега $v_3$ , м/с | 0,65 | 0,8 | 0,8 |
| скорость течения на дне потока у берега $v_4$ ($y=d$, $z=h_d$) | 0.54 | 0,8 | 0,6 |
| $C_1$ | 0,379 | 0,4 | 0,4 |
| $C_2$ | -0,002 | 0,04 | -0,004 |
| $C_3$ | -0,011 | -0,0167 | -0,056 |
| Модуль среднего отклонения от фактического значения $\lvert\delta\rvert$,(% от фактического значения) | 2,8 | 9,5 | 7,1 |

Результаты расчета скоростей течения по формуле (2) отражены в виде изолиний рассчитанных скоростей для сравнения общей картины с фактическим скоростным полем (рис.1)

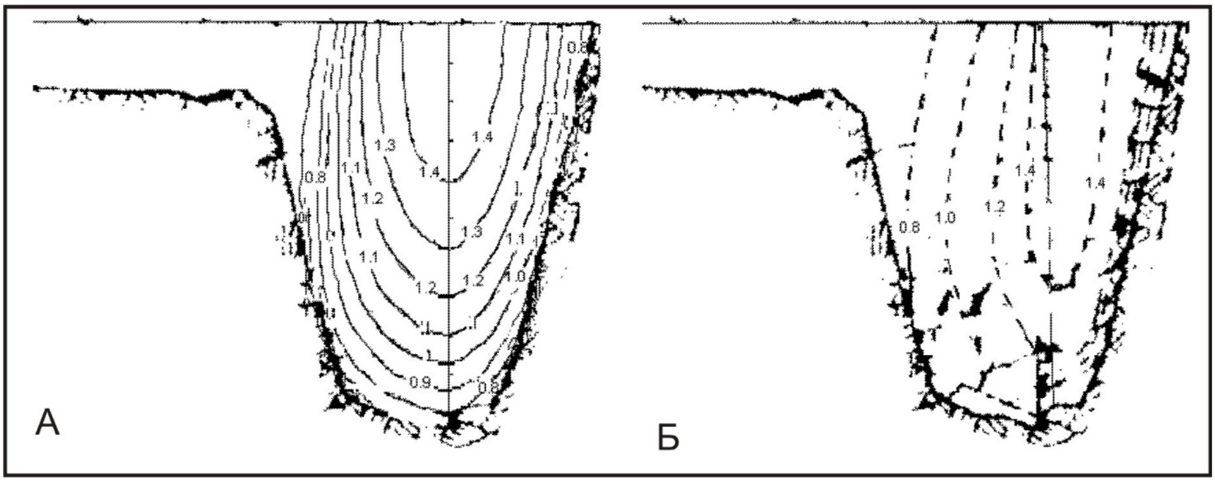


Рис. 1. Изолинии равных скоростей течения в русле р. Полометь – с. Зеленый Бор (IX створ). А – скорости, рассчитанные по формуле (2); Б – фактические скорости по измерениям Виноградова [11]

Выражение (2) отражает неоднозначную в общем случае зависимость величины скорости течения от местоположения точки, то есть имеет место одновременное влияние удаления от динамической оси, как в глубину, так и в сторону берега. В результате, на вертикалях, вблизи берега может наблюдаться погружение максимума скорости под поверхность потока, что неоднократно отмечается в естественных русловых потоках с пространственным режимом движения.

### *Заключение*

Сравнение значений местной осредненной скорости, полученных путем расчета по формуле (2) с фактическими значениями местных скоростей обнаруживает хорошее соответствие натурным данным как вблизи динамической оси, в области действия законов невязкой жидкости, так и вблизи твердых границ потока, где наблюдается их тормозящее влияние. Важным обстоятельством является структурное соответствие рассчитанного поля скоростей течения фактическому. В частности, расчетное поле отражает погружение максимальных скоростей на прибрежных вертикалях, которое имеет место при пространственном характере течения.

Учитывая характер граничных условий (значения искомой функции в трех или четырех точках границы расчетной области), полученную зависимость следует считать интерполяционной. Тем не менее, соблюдение требования удовлетворения полученного аналитического выражения уравнению (1) дает основание для его применения к различным поперечным сечениям руслового потока без изменения общего вида этого выражения.

Для оценки практического значения предлагаемых методик напомним, какие экспериментальные данные требуются для реализации формул В.Н. Гончарова и В.П. Рогуновича, которые также являются функциями от двух переменных, но представляют собой логарифмические зависимости [5, 6]. Для того чтобы успешно применить логарифмическую зависимость В.Н. Гончарова, требуется, как минимум, знать среднюю или поверхностную скорость на осевой вертикали, глубину потока, и высоту выступов шероховатости. Для определения последнего, требуется проводить гранулометрический анализ донных отложений. От методики В.П. Рогуновича полиномиальная зависимость выгодно отличается тем, что не требует обязательного деления смоченного периметра на участки берега и дна. Такое деление зачастую может быть лишь условным.

### *Благодарности*

Работа выполнена при поддержке проекта «Динамические и эволюционные процессы в природных экосистемах Сибири: индикаторы, мониторинг, прогноз» (госзадание ИМКЭС СО РАН, регистрационный номер проекта № FWRG-2021-0003).

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутаков А. Н. Гидравлика развития мезоформ речного русла. – М.: Изд-во РУДН, 1999. – 215 с.

2. Шугрин С. М. Соединение одномерной и двумерной (плановой) моделей течения воды // Водные ресурсы. – 1987. – №5. – С. 5-15.

3. Чуруксаева В. В., Старченко А. В. Математическая модель и численный методдля расчета турбулентного течения в русле реки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. - № 6(38). – С. 100 – 114.

4. Барышников Н. Б. Динамика русловых потоков. – учебник. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 314 с.

5. Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1962. – 374 с.

6. Рогунович В. П. Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 264 с.

7. Караушев А. В. Проблемы динамики естественных водных потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1960. – 390 с.

8. Маккавеев В. М. Вопросы теории турбулентности и движения наносов // Труды ГГИ. – 1963. – Вып. 100. – С. 54– 87.

9. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998. – 367 с.

10. Клавен А. Б., Никитин В. Н. О кинематической структуре турбулентного руслового потока // Труды ГГИ. – 1990. – Вып. 337. – С. 3– 15.

11. Виноградов В. А. Натурные исследования морфологии и гидравлики излучин свободного меандрирования // Труды ГГИ, 1970. – Вып.183. – С.119– 142.

12. Хон А. В. Саморегуляция в динамике взаимодействия речного потока и русла//Автореферат дис. канд. географ. наук. Томск: 2003. – 23 с.