

*А. А. Михайлов<sup>1\*</sup>, И. К. Искандаров<sup>2</sup>*

## **Моделирование переноса растворенного вещества в упругодеформируемом пороупругом глинистом сланце**

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация  
\* e-mail: alex\_mikh@omzg.sccc.ru

**Аннотация.** Распространение акустических волн в упругих, пористых средах с учетом химических эффектов представляет интерес для различных областей науки и техники. Теория этого явления широко изучалась в механике грунтов, сейсмологии, акустике, сейсмотехнике, геофизике и многих других дисциплинах. В настоящей работе рассматривается перенос растворителя и растворенного вещества в химически инертной упруго-деформируемой горной породе. При этом учитываются только изменения напряжения и порового давления, а химия насыщающей поровой жидкости не оказывает прямого влияния на деформацию горной породы. Химические эффекты учитываются посредством изменения порового давления и деформации горных пород в уравнениях переноса. Для численного решения рассматриваемой задачи используется комбинирование метода интегрального преобразования Лагерра и метода конечных разностей. В работе представлено моделирование переноса растворенного вещества через полупроницаемый глинистый сланец.

**Ключевые слова:** пористая среда, насыщенная жидкость, упругие параметры, проницаемость, тензор напряжений, парциальная плотность, химический потенциал

*A. A. Mikhailov<sup>1\*</sup>, I. K. Iskandarov<sup>2</sup>*

## **Simulation of Solute Transport in Elastically Deformable Poroelastic Shale**

<sup>1</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, the Russian Federation

<sup>2</sup> Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation  
\* e-mail: alex\_mikh@omzg.sccc.ru

**Abstract.** The propagation of acoustic waves in elastic, porous media, taking into account chemical effects, is of interest for various fields of science and technology. The theory of this phenomenon has been widely studied in soil mechanics, seismology, acoustics, seismic engineering, ocean engineering, geophysics and many other disciplines. This paper examines the transport of solvent and solute in a chemically inert elastically deformable rock. In this case, only changes in stress and pore pressure are taken into account, and the chemistry of the saturating pore fluid does not directly affect the deformation of the rock. Chemical effects are taken into account through changes in pore pressure and rock deformation in the transport equations. To numerically solve the problem under consideration, an algorithm combining the Laguerre integral transform method and the finite difference method is used. The modeling of solute transport through semipermeable shale are presents.

**Keywords:** porous medium, saturated liquid, elastic parameters, permeability, stress tensor, partial density, chemical potential

### *Введение*

В сланцах может происходить катионный обмен между глинистыми поверхностями и участвующей поровой жидкостью. Другие растворенные вещества также могут адсорбироваться или десорбироваться на стенках пор. Этими эффектами можно пренебречь [1]. Результат этого переноса справедлив лишь для молекул, которые не склонны адсорбировать, или количество которых уже достаточно в порах, так что равновесие между породой и поровой жидкостью не нарушается. Примером может служить перенос натрия через глину, которая имеет только натриевые противоионы. Пренебрежение адсорбцией/десорбцией и непосредственными химическими эффектами в теории пороупругости в соотношении напряжение-деформация приводит к упрощению основных уравнений.

В [2] рассмотрена химопороупругая модель для оценки профиля напряжений околоскважинного пространства, а в [3] решена система уравнений химотермопороупругости на основе неявного конечно-разностного метода. Далее, будем считать также как в [1], что объемный модуль  $K$  раствора не зависит от мольной фракции  $\Psi$ , и ограничимся изотермическим случаем при постоянной температуре. В [4] установлена зависимость коэффициента диффузии от пористости.

### *Система уравнений параболического типа*

Распространения диффузии в модели переноса растворителя и растворенного вещества в химически инертной упруго-деформируемой горной породе описывается следующей системой [1]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \nabla^2 \Phi + H \nabla^2 \Psi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = C \nabla^2 \Phi + E \nabla^2 \Psi, \quad (2)$$

В формулах (1), (2)  $\Phi = \sigma_{kk} + \frac{3p}{B}$ ,  $\sigma_{kk}$  – след тензора напряжений,  $p$  -- поровое давление,

$$A = \frac{2GB^2k(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)V_{soln}} [\gamma V_s x_0^s + V_w(1-x_0^s)],$$

$$H = \frac{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)(\gamma-1)RTk}{3(\nu_u-\nu)},$$

$$C = \frac{(\gamma - 1)Bk(1 - \nu)(1 + \nu_u)V_s V_w x_0^s (1 - x_0^s)}{3(1 - \nu_u)(1 + \nu)\alpha V_{soln}},$$

$$E = \frac{V_s}{\alpha V_{soln}} \left[ \gamma D V_{soln} + (1 - \gamma) R T k x_0^s \right],$$

$\gamma$  - коэффициент пропускания,  $V_s, V_w$  -- соответствующие парциальные молярные объемы растворенного вещества и растворителя,  $x_0^s$  - некоторая средняя молярная доля,  $D$  - коэффициент диффузии,  $G$  -- модуль сдвига,  $B$  -- параметр Скемптона и  $\nu, \nu_u$  -- соответствующие дренированными и недренированными коэффициентами Пуассона,  $R$  -- газовая постоянная,  $T$  -- температура,  $k$  -- коэффициентом гидравлического сопротивления.

Как показаны [5-9], коэффициенты  $\nu$  и  $k$  можно связать с пористостью:

$$\nu = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + G)}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda - (\alpha \rho^2)^{-1} K^2, \quad K = \lambda + \frac{2}{3} G, \quad k = \frac{\mu}{\chi \rho \rho_l},$$

где  $\mu$  - вязкость воды,  $\chi$  - коэффициент трение,  $\rho = \rho_l + \rho_s$ ,  $\rho_s = \rho_s^f (1 - d_0)$  и  $\rho_l = \rho_l^f d_0$ ,  $d_0$  - пористость,  $\rho_s^f$  и  $\rho_l^f$  - физические плотности пористого тела и воды соответственно,  $\lambda, G, \alpha \rho^2$  - упругие параметры пористой среды [10].

Упругие параметры  $K, G, \alpha$  выражаются через скорость распространения поперечной волны  $c_s$  и две скорости продольных волн  $c_{p_1}, c_{p_2}$  [11, 12]:

$$G = \rho_s c_s^2,$$

$$K = \frac{\rho}{2} \frac{\rho_s}{\rho_l} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_l}{\rho} c_s^2 - \sqrt{\left( c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right),$$

$$\rho^2 \alpha = \frac{1}{2} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_l}{\rho} c_s^2 + \sqrt{\left( c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right).$$

### **Постановка задачи**

Рассмотрим одномерный процесс распространение диффузии переноса растворенного вещества в пороупругом глинистом сланце. В этом случае функции  $\Phi(x, t)$  и  $\Psi(x, t)$  определяются из системы уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4)$$

с граничными

$$\Phi|_{x=0} = \Phi_0(t), \quad \Phi|_{x=L} = \Phi_1(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\Psi|_{x=0} = \Psi_0(t), \quad \Psi|_{x=L} = \Psi_1(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

и нулевыми данными Коши

$$\Phi|_{t=0} = 0, \quad \Psi|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L. \quad (7)$$

### *Алгоритм решения*

Для решения начально-краевой задачи (3) – (7) используем метод Лагерра интегральное преобразование по времени:

$$\vec{W}^m(x) = \int_0^\infty \vec{W}(x,t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht),$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x,t) = (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}^m(x) l_m^\alpha(ht),$$

где  $l_m^\alpha(t)$  – является функцией Лагерра.

Функции Лагерра  $l_m^\alpha(t)$  выражаются через классические ортонормированные многочлены Лагерра  $L_m^\alpha(t)$  [14]. В этой работе выбираем параметр  $\alpha$  как целое и положительное, тогда:

$$l_m^\alpha(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_m^\alpha(t).$$

Для первой и второй производных полиномов Лагерра имеем следующие формулы:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_m^\alpha(ht) = -h \sum_{k=0}^{m-1} L_k^\alpha(ht),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_m^\alpha(ht) = h^2 \sum_{k=0}^{m-2} (m-k-1) L_k^\alpha(ht).$$

Легко видеть, что для удовлетворения начальных условий задачи необходимо достаточно установить значение  $\alpha \geq 2$ . Более того, в этих формулах введем параметр сдвига  $h > 0$ , значение и эффективность которого подробно обсуждаются в [15, 16].

В результате применения преобразования Лагерра исходная начально-краевая задача (3) – (7) сводится к одномерной краевой задаче для обыкновенного дифференциальной системы в спектральной области, которая переписывается в виде:

$$\frac{h}{2} \Phi^m = A \frac{d^2 \Phi^m}{dx^2} + H \frac{d^2 \Psi^m}{dx^2} - h \sum_{k=0}^{m-1} \Phi^{k*}, \quad 0 < x < L, \quad (8)$$

$$\frac{h}{2} \Psi^m = C \frac{d^2 \Phi^m}{dx^2} + E \frac{d^2 \Psi^m}{dx^2} - h \sum_{k=0}^{m-1} \Psi^k, \quad 0 < x < L \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\Phi^m \Big|_{x=0} = \Phi_0^m, \quad \Phi^m \Big|_{x=L} = \Phi_1^m, \quad (10)$$

$$\Psi^m \Big|_{x=0} = \Psi_0^m, \quad \Psi^m \Big|_{x=L} = \Psi_1^m. \quad (11)$$

Для решения краевой задачи (8)–(11) используем конечно-разностный метод со вторым порядком точности [17].

### **Численные результаты**

Для численных расчётов, для верификации сначала вместо параболической системы (7)-(8), рассматривалась гиперболическая система с соответствующими начально-краевыми условиями (9)-(11). На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты расчетов сейсмических трасс  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  компонент для двухслойной модели среды со следующими физическими характеристиками:  $x_0^s = 0.1$ ,  $\varphi = 0.14$ ,  $B = 0.92$ ,  $T = 300\text{K}$ ,  $\nu = 0$ ,  $\nu_u = 0.44$ ,  $V_S = 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ,  $V_W = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ,  $R = 8.3 \text{ ДжК}^{-1} \text{ мол}^{-1}$ , коэффициент диффузии  $D = 10^{-7} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , проницаемость  $k = 1.4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$ .

Границы первого слоя определялись как  $0 \leq x \leq 5 \cdot 10^{-4}$ , а для второго  $5 \cdot 10^{-4} \leq x \leq 10^{-3}$ .

Волновое поле моделировалось от источника, находящегося на левом конце первого пороупругого слоя:  $\Phi_0(t)=0, \Phi_1(t)=0, \Psi_0(t)=f(t), \Psi_1(t)=0$ . Временной сигнал в источнике задавался в виде

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\kappa^2}\right) \sin\left(2\pi f_0(t-t_0)\right),$$

где  $\kappa = 4, f_0 = 1$  Гц,  $t_0 = 1,5$  с.

Для расчетов трасс  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ , представленных на рисунках, были заданы следующие характеристики слоёв: для первого слоя - модуль сдвига  $G = 0.6$  ГПа и коэффициент пропускания  $\gamma = 0.7$ , для второго слоя - модуль сдвига  $G = 1$  ГПа и коэффициент пропускания  $\gamma = 0.2$ .

Следовательно, коэффициенты системы (7)-(8) для первого слоя определяются как

$A = 0.280 \cdot 10^{-10}, H = -0.899 \cdot 10^{-8}, C = -0.286 \cdot 10^{-25}, E = 0.126 \cdot 10^{-10}$ , а следовательно расчётные скорости упругих колебаний в этом слое  $c_1 = 0.530 \cdot 10^{-5}$  м/сек,  $c_2 = 0.355 \cdot 10^{-5}$  м/сек. Коэффициенты системы для второго слоя коэффициенты системы определяются как

$A = 0.936 \cdot 10^{-11}, H = -0.299 \cdot 10^{-8}, C = -0.285 \cdot 10^{-25}, E = 0.631 \cdot 10^{-10}$ , а следовательно скорости упругих колебаний в этом слое  $c_1 = 0.794 \cdot 10^{-5}$  м/сек,  $c_2 = 0.306 \cdot 10^{-5}$  м/сек.

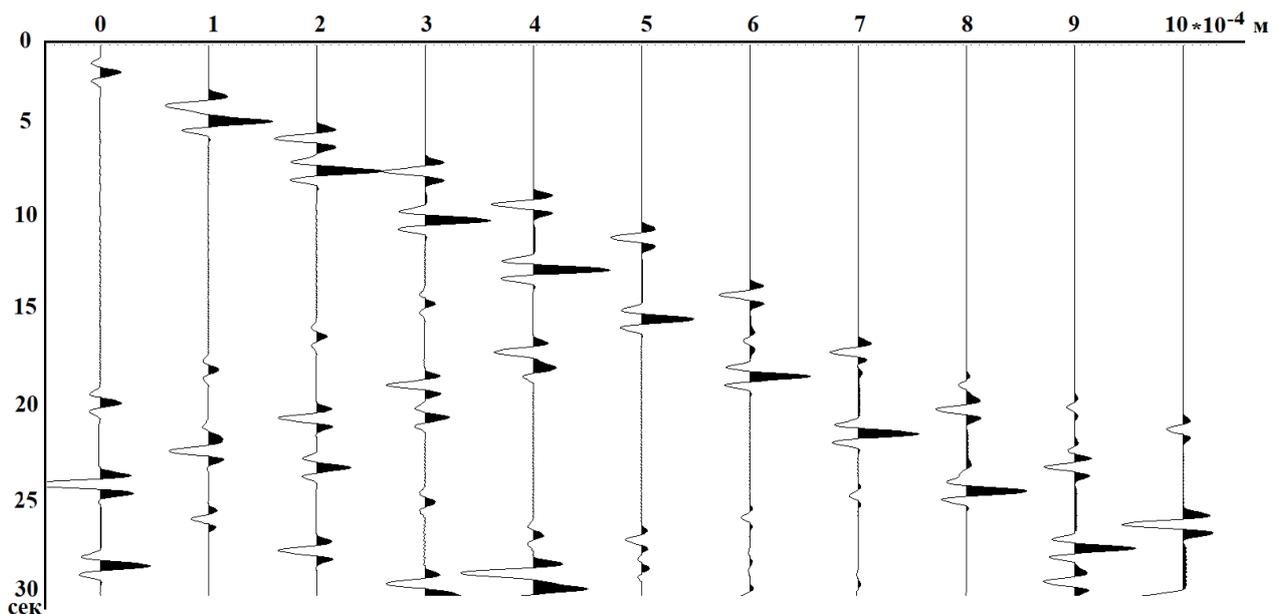


Рис 1. Трассы для компоненты  $\Phi(t)$

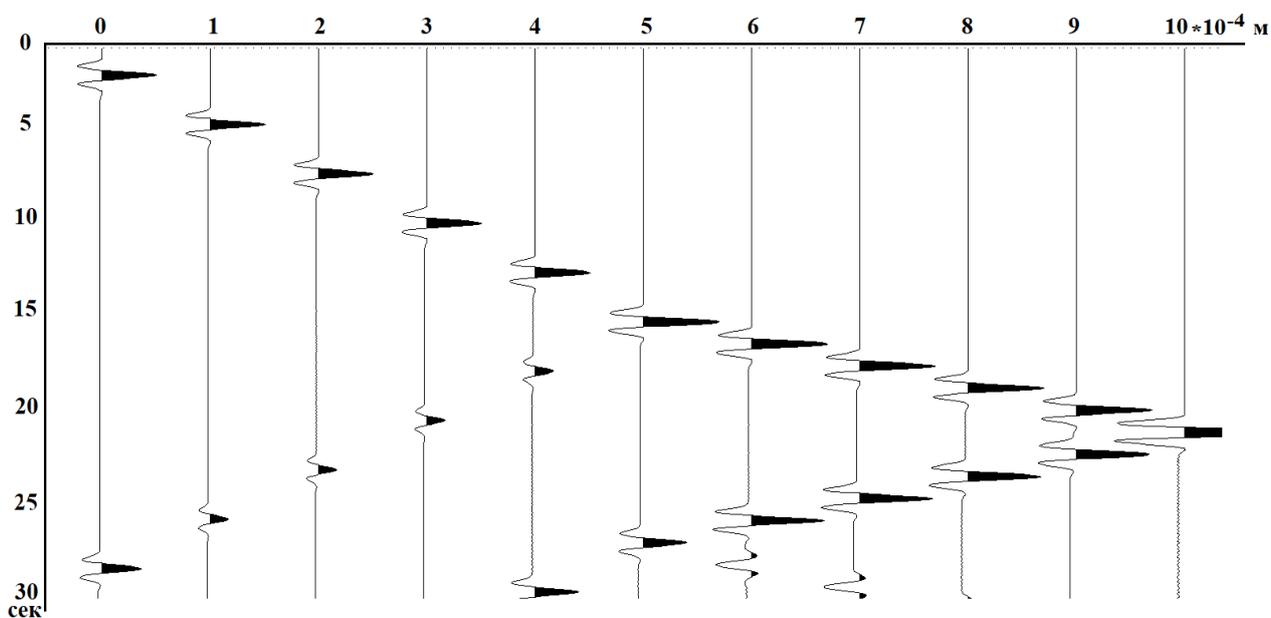


Рис 2. Трассы для компоненты  $\Psi(t)$

Из представленных рисунков видно, что образуются соответствующие два типа проходящих и отражённых волн  $C_1$  и  $C_2$  для компоненты  $\Phi(x,t)$  и волн  $C_2$  для компоненты  $\Psi(x,t)$ .

### Заключение

Рассмотрена химически инертная деформируемая горная порода, для которой учитываются только изменения напряжения и порового давления: химия пористой жидкости не оказывает прямого влияния на деформацию.

Показано, что изменения химических эффектов приводит к изменению порового давления и деформации горных пород. Предлагаемый алгоритм решения является аналогом известных спектральных методов решения динамических задач. Однако, в отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения по гармоникам входит только в правую часть в рекуррентном виде. В результате матрица системы сведенной задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать эффективные методы решения полученных систем линейных алгебраических уравнений. Численно решена задача переноса растворителя и растворенного вещества через полупроницаемый глинистый сланец на основе предложенного алгоритма.

*Работа Искандарова И.К. выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-932 от 16 февраля 2023 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Sherwood J.D. A model of hindered solute transport in a poroelastic shale // Proc. Roy. Soc. London. 1994. – v. 445. – P. 679– 692.
2. Roshan H., Rahman S. A fully coupled chemo-poroelastic analysis of pore pressure and stress distribution around a wellbore in water active rocks // Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2011. – v. 44. – P. 199– 210.
3. Rafieepour S., Zamiran S., Ostadhassan M. A cost-effective chemo-thermo-poroelastic wellbore stability model for mud weight design during drilling through shale formations // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2020. – v. 12. – P. 768– 779.
4. Имомназарови Б.Х., Михайлов А.А., Хайдаров И.К., Холмуродов А.Э. Численное решение задачи переноса растворенного вещества в пороупругом глинистом сланце // Сибирские Электронные Математические Известия. 2021. – т. 18. – С. 694– 702.
5. Sherwood J.D. Biot poroelasticity of a chemically active shale // Proc. Roy.Soc. London. – 1993 – v. 440. – P. 365– 377.
6. Haydarov I., Imomnazarov B. On one model of solute transport in poroelastic shale // Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. in Geoph. – 2019. – v. 21. – P. 1-9.
7. Rice J.R., Cleary M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. Space Phys. – 1976. – v. 14. – P. 227– 241.
8. Imomnazarov Kh.Kh. Concentrated force in a porous half-space // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. – 1998. – № 4. – P. 71– 77.
9. Grachev E.V., Zhabborov N.M., Imomnazarov Kh.Kh. A Concentrated Force in an Elastic Porous Half-Space // Doklady Physics. – 2003. – v. 48. – P. 376– 378.
10. Grachev E., Imomnazarov Kh., Zhabborov N. One nonclassical problem for the statics equations of elastic-deformed porous media in a half-plane // Applied Mathematics Letters. – 2004. – v. 17. – P. 31– 34.
11. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocitity continuum // Nova Science. New York. – 1995.
12. Imomnazarov Kh.Kh. Some Remarks on the Biot System of Equations // Doklady RAS. – 2000. – v. 373. – P 536-537 (in Russian).
13. Imomnazarov Kh.Kh. Some Remarks on the Biot System of Equations Describing Wave Propagation in a Porous Medium // Appl. Math. Lett. – 2000. – v. 13. – P. 33– 35.
14. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G. Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk. – 1998. – № 4. – P.79– 91.
15. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure appl. geophys. – 2003. – v. 160. – P. 1207– 1224.
16. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. – 2003. – v. 51. – P. 37–48.
17. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.

© А. А. Михайлов, И. К. Искандаров, 2024