

*С. А. Соловьев<sup>1\*</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup>, М. А. Новиков<sup>1</sup>*

## **Численное решение уравнений Био на вычислительных системах с процессорами разных производителей**

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск,  
Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука, г. Новосибирск,  
Российская Федерация

\* e-mail: solovevsa@ipgg.sbras.ru

**Аннотация.** Квазистатическое уравнение Био в частотной области может быть использовано для моделирования нагружения пороупругих материалов, заполненных жидкостью, в низкочастотном случае, а также для оценки эффективных частотно-зависимых отношений деформаций и напряжений. Для численного решения указанного уравнения используется алгоритм, основанный на конечно-разностной аппроксимации и итерационном решении СЛАУ с применением техники предобусловливания. Для обращения предобусловливателя применяются оптимизированные программные продукты, основанные на прямых методах. В данной работе представлены результаты реализации и тестирования предложенного алгоритма на различных системах с общей памятью. Эксперименты проводились на серверах с процессорами Intel, AMD и Эльбрус. Измерялись точность, память и производительность. Полученные результаты демонстрируют устойчивость предложенного алгоритма на этих архитектурах.

**Ключевые слова:** пороупругость, уравнение Био, конечные разности, прямые методы решения СЛАУ, итерационные методы, предобуславливатель с разделением полей

*S. A. Solovyev<sup>1\*</sup>, V. V. Lisitsa<sup>1</sup>, M. A. Novikov<sup>2</sup>*

## **Numerical solution of Biot equations on computing systems with processors of different models**

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Novosibirsk, Russian Federation

\* e-mail: solovevsa@ipgg.sbras.ru

**Abstract.** The quasi-static Biot equation in the frequency domain can be used to model the loading of poroelastic materials filled with liquid in the low-frequency case and to estimate the effective frequency-dependent strain-stress relations. For numerical solution of the above equation we use an algorithm based on finite-difference approximation and iterative solution the system of SLAE using the preconditioning technique. Optimised software products based on direct methods are applied to inverse this preconditioner. This paper presents the results of implementation and testing of the proposed algorithm on various shared memory systems. The experiments were performed on servers with Intel, AMD and Elbrus processors. Accuracy, memory and performance were measured. The obtained results demonstrate the stability of the proposed algorithm on these architectures.

**Keywords:** poroelasticity, Biot equation, finite differences, direct methods for SLAE, iterative methods, field-split preconditioner

## Введение

Численное исследование влияния сложных систем трещин на сейсмические волны в пороупругих флюидонасыщенных средах является актуальной задачей, несмотря на то, что исследования по теории пороупругости и численному решению уравнений Био начались в 1950-х гг. [4]. Объектом исследования является моделирование указанных уравнения в квазистатическом состоянии в пористой области с трещинами. Представлен ряд численных алгоритмов [3, 7, 8], основанных на конечно-элементной аппроксимации квазистатических уравнений Био с уточнением сетки в пределах трещин. Однако эти исследования проводились для моделей, содержащих всего несколько десятков трещин и требующих несколько тысяч степеней свободы для моделирования. В работе [11] предложен алгоритм численного масштабирования пороупругой модели для образцов, содержащих тысячи трещин. Подход основан на конечных разностях с использованием прямого решателя для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений с несколькими правыми частями.

В предложенной работе представлены результаты реализации алгоритма решения дискретизированного уравнения Био в квазистатическом состоянии на основе итерационного решателя VCGStab с предобуславливателем методом разделения полей (детали реализации представлены в статье [9]). Целью исследования является изучение поведения алгоритма на различных архитектурах, таких как Intel, AMD и Эльбрус.

## Постановка задачи

Уравнения модели Био, сформулированные в квазистатическом режиме, представляют процесс диффузии давления в заполненных жидкостью пороупругих средах [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ C_{55} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ C_{55} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha M \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha M \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z = 0. \quad (4)$$

Векторы скорости и относительной скорости жидкости –  $\vec{u} = (u_x, u_z)^T$  и  $\vec{w} = (w_x, w_z)^T$ . Параметр  $\omega$  – временная частота, тензор жесткости флюидонасыщенной матрицы – это коэффициенты  $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{55}$ . Коэффициент прони-

цаемости  $k$ ; параметры потока жидкости  $M$  – коэффициент аккумуляции жидкости,  $\alpha$  – коэффициент Био-Уиллиса,  $\eta$  – вязкость жидкости.

Система уравнений (1)–(4) дополняется следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \vec{n} |_{\partial D} &= \vec{\sigma}_0 \\ \vec{w} \cdot \vec{n} |_{\partial D} &= 0,\end{aligned}\tag{5}$$

где тензор напряжений  $\sigma$  определяется формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha M \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \quad \sigma_{xz} = C_{55} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Постановка пороупругой задачи заключается в восстановлении зависящего от частоты и не зависящими от координат тензора жесткости ортотропной вязкоупругой среды. Решение исходной задачи (1)-(5) в пороупругих средах должно совпадать с решением масштабируемой задачи с однородными коэффициентами в той же области. Для решения этой задачи необходимо решить СЛАУ с тремя правыми частями, вытекающей из аппроксимации системы уравнений (1)-(5) в квадратной области с тремя разными граничными условиями. Эти граничные условия, детали алгоритма восстановления и конечно-разностная аппроксимация уравнений (1)-(4) на сдвинутых сетках описаны в работах [10], [12].

Отметим основные свойства получаемой СЛАУ. Во-первых, матрица системы  $A$  – разреженная квадратная, комплексная, не Эрмитова и несимметричная. Во-вторых, из-за граничных условий типа Неймана (5) она плохообусловлена (сингулярная). Также она может быть представлена в "блочном виде"

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \text{ где } A_0 \text{ – симметричная полуопределенная матрица с вещественными коэффициентами, соответствующая оператору первых двух уравнений (1)-(2), действующего на вектор } \vec{u}.$$

Матрицы  $A_1$  и  $A_2$  также вещественные, в общем случае прямоугольные и равны с точностью до симметрии,  $A_3$  – с комплексными значениями на главной диагонали и не является симметричной из-за "смешанного" граничного условия (5).

### **Алгоритм решения СЛАУ и реализация программного обеспечения**

Для решения СЛАУ  $Ax = b$  используется алгоритм VCGStab [14]. Зачастую итерационный процесс расходится и необходимо использовать предобуславливатель  $B$  [13], [1], [6], [5] что дает модифицированную систему:  $\hat{A}x = \hat{b}$ , где  $\hat{b} = B^{-1}b$ ,  $\hat{A} = B^{-1}A$ . При построении предобуславливателя применяется подход

Field-Split, в результате он имеет крупноблочную нижнетреугольную структуру  $B = \begin{pmatrix} A_0 & \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$ . Обращением матриц  $A_0, A_3$  производится прямым решателем.

Детали построения и обращения преобуславливателя описаны в статье [9].

Алгоритм решения задачи Био реализован на языке C и использует только одну стороннюю компоненту – прямой решатель разреженных СЛАУ. Для архитектур Intel и AMD используется высокооптимизированная компонента Intel MKL PARDISO. Но она не поддерживает отечественную архитектуру Эльбрус, и для нее выбран российский прямой разреженный решатель USPARS, который обладает аналогичной функциональностью и также оптимизирован для упомянутых архитектур: Intel, AMD и Эльбрус.

Также на Intel и AMD используется компилятор Intel. Он в полной мере использует особенности этих процессоров. На системе Эльбрус используется собственный компилятор LCC, специально разработанный для таких процессоров. Для разработки и тестирования программы Био используются серверы, перечисленные в таблице 1.

Таблица 1

Вычислительные системы для экспериментов

	Intel(R) Xeon(R) Gold 6248R	AMD EPYC™ 7763	Эльбрус 16С
	ark.in- tel.com	www.amd.com	mcst.ru
тактовая ча- стота	3.00GHz	2.45GHz	2.00GHz
Число ядер	24	64	16
Оперативная память RAM, GB	768	1024	256

### *Численные эксперименты*

В численных экспериментах используется пороупругая модель (квадратная область  $1\text{м} \times 1\text{м}$ ) с взаимосвязанными трещинами. Свойства материалов модели подробно описаны в работе [9]. Визуализация трещин (плотность материала) показана на рисунке 1. Одним из основных результатов экспериментов является то, что качество решения не зависит от используемой архитектуры.

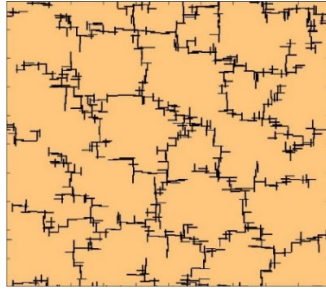


Рис. 1. Трещиноватая модель

### ***Визуализация напряжения и давления***

Распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{zz}$  при *горизонтальном* нагружении для частоты 10 Гц показаны на рисунке 2 ( $\sigma_{xz}$  во много раз меньше остальных, поэтому не показана). На всех из них светлые зоны с большим напряжением, темные – с меньшим.

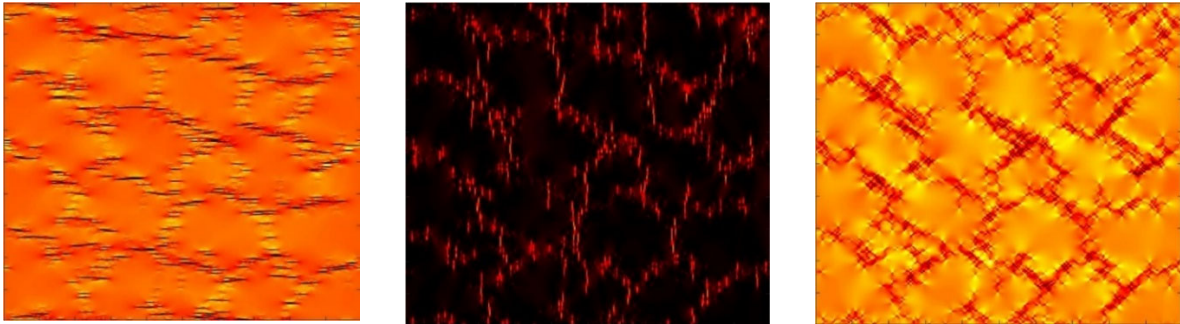


Рис. 2. Горизонтальная нагрузка, напряжения:  $\sigma_{xx}$  (слева),  $\sigma_{zz}$  (центр); нагрузка скручиванием, напряжение  $\sigma_{xz}$  (справа)

Компоненты напряжений при *вертикальном* нагружении визуально похожи на компоненты при горизонтальном нагружении с точностью до симметрии, а также замены  $\sigma_{xx}$  на  $\sigma_{zz}$  и наоборот. Для нагрузки *скручиванием* компонента напряжения  $\sigma_{xz}$  больше, чем  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{zz}$  (рисунок 2, справа).

Давление  $p = -M(\alpha(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{u})$  показано трех разных частот (10, 100 и 1000 Гц) на примере вертикальной нагрузки (рисунок 3). Неоднородное поведение  $p$  наблюдается при увеличении частоты. С увеличением частоты концентрация давления становится ближе к трещинам. При горизонтальной нагрузке поведение  $p$  похожее, а при скручивающей нагрузки оно значительно меньше.

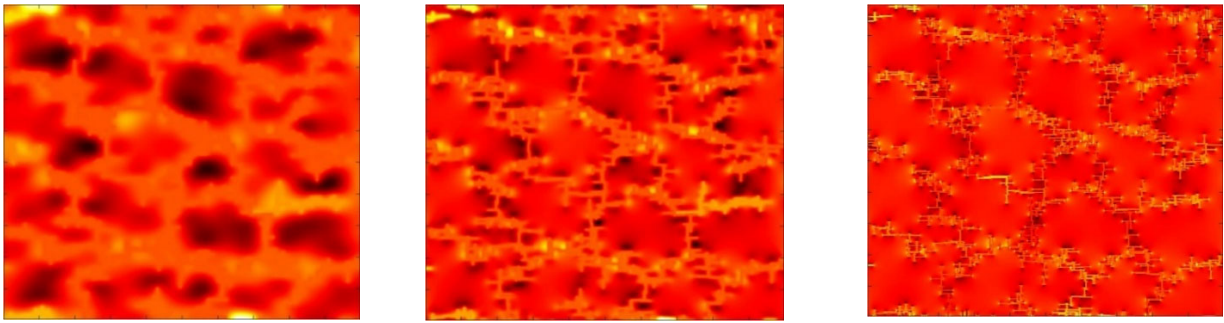


Рис. 3. Давление для *вертикальной* нагрузки, 10 Гц (слева), 100 Гц (центр) и 1000 Гц (справа)

### *Характеристики вычислительного процесса.*

С точки зрения вычислительного процесса важны две основные характеристики: время и потребление памяти. Наиболее затратным является решение систем  $A_0x_0 = b_0$  и  $A_3x_3 = b_3$  при обращении  $B$ . Как уже было сказано выше, для этого используются высокооптимизированные сторонние продукты.

С обывательской точки зрения в первую очередь интересует максимальный размер модели, которая может быть решена на вычислительных системах (таб. 1). В таблице 2 приводится потребление памяти программой Био для моделей разных размеров.

*Таблица 2*

Потребление памяти

# сетки	Размер сетки $n$ $n = n_x = n_z$	Размер СЛАУ	Потребление памяти, GB
1	500	$1 * 10^6$	6
2	1000	$4 * 10^6$	25
3	2000	$16 * 10^6$	105
4	4000	$64 * 10^6$	452

Потребление памяти связано с размером задачи. Это предсказуемо, поскольку размер матриц  $A_0, A_1, A_2, A_3$  растут линейно, а пиковая память разреженных прямых решателей для матриц из двумерных задач имеет схожее поведение. Это поведение подтверждается численно для решателей MKL PARDISO и USPARS.

Результаты замеров, процентное соотношение между обращением матриц  $A_0, A_3$  прямым решателем и другими функциями приведены в таблице 3. Результаты получены без распараллеливания, т.е. на одном ядре каждого процессора.

Таблица 3

Время (сек.) решения задачи Био на **одном** вычислительном ядре для 4 частот; процентное соотношение прямого решателя к остальной функциональности

# сетки	Intel		AMD		Эльбрус
	PARDISO	USPARS	PARDISO	USPARS	USPARS
1	116,3 (64% / 36%)	122,1 (69% / 31%)	79,4 (72% / 28%)	85,5 (73% / 27%)	261,3 (80% / 20%)
2	464,1 (70% / 30%)	474,3 (73% / 27%)	355,4 (80% / 20%)	354,0 (80% / 20%)	1043,1 (82% / 18%)
3	2 323,0 (78% / 22%)	2 219,5 (77% / 23%)	2 191,7 (87% / 13%)	1 877,5 (85% / 15%)	4 986,0 (86% / 14%)
4	15 156,6 (80% / 20%)	11 431,9 (81% / 19%)	14 925,0 (89% / 11%)	11 670,8 (88% / 12%)	N/A

Не смотря на то что прямые решатели очень ресурсоемки, из таблицы видно, что по времени исполнения они соизмеримы с остальной функциональностью. Это можно объяснить высокой степенью их оптимизации. С другой стороны, доля прямых решателей увеличивается с ростом размера задачи.

Таблица 4 показывает потенциал предлагаемой программы решения задачи Био для распараллеливания на нескольких вычислительных ядрах.

Таблица 4

Время (сек.) решения задачи Био на **максимальном** количестве вычислительных ядер для 4 частот; процентное соотношение прямого решателя к остальной функциональности.

# сетки	Intel		AMD		Эльбрус
	PARDISO	USPARS	PARDISO	USPARS	USPARS
1	69,0 (58% / 42%)	72,1 (60% / 40%)	43,7 (52% / 48%)	50,9 (59% / 41%)	184,4 (72% / 28%)
2	247,7 (60% / 40%)	255,8 (61% / 39%)	140,3 (57% / 43%)	168,3 (63% / 37%)	686,0 (73% / 27%)
3	1 063,1 (61% / 39%)	1 034,3 (62% / 38%)	580,8 (60% / 40%)	671,3 (65% / 35%)	2 805,0 (74% / 26%)
4	5 110,3 (66% / 34%)	5 514,4 (62% / 38%)	3 305,7 (62% / 38%)	3 172,1 (64% / 36%)	N/A

Время вычислений стало меньше, чем на одном, но масштабируемость далека от идеальной. По времени вклад прямых решателей стал меньше благодаря их хорошей распараллеливаемости. Плохая масштабируемость других функциональных возможностей объясняется наличием большого количества различных

функций, что сильно затрудняет их распараллеливание. С другой стороны, реализованная программа решения задачи Био имеет потенциал для улучшения.

### ***Заключение***

Представлены результаты реализации алгоритма решения дискретизированного уравнения Био в квазистатическом состоянии. Помимо собственной реализации основного функционала, для решения СЛАУ использовались библиотеки сторонних разработчиков. На разных архитектурах (Intel, AMD и Эльбрус) получены схожие по точности результаты с приемлемым качеством решения. Характеристики вычислительного процесса, такие как количество итераций, потребление памяти, также схожи. Несмотря на то что время решения на разных процессах варьируется, оно не сильно увеличивается с ростом размера модели. Масштабируемость далека от идеала и алгоритм имеет потенциал для улучшения. Однако это не так существенно, поскольку самая большая задача Био может быть решена за приемлемое время.

Главный вывод заключается в том, что предложенный решатель Био может быть успешно использован для моделирования пороупругости на аппаратных системах с различными процессорами.

### ***Благодарности***

Работа поддержана грантом РФФ № 19-77-20004.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Belonosov, M., Kostin, V., Neklyudov, D., Tcheverda, V.: 3d numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver. *Geophysics* 83(6), T333-T344 (2018)
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* – V. 28 – pp. 168-178 – 1956
3. Carcione, J.M., Santos, J.E., Picotti, S.: Anisotropic poroelasticity and wave-induced fluid flow: harmonic finite-element simulations. *Geophysical Journal International* 186(3), 1245-1254 (2011)
4. Carcione, J.M., Morency, C., Santos, J.E.: Computational poroelasticity – a review. *Geophysics* 75(5), 75A229-75A243 (2010)
5. Evstigneev, N.M., Ryabkov, O.I., Gerke, K.M.: Stationary stokes solver for single-phase flow in porous media: A blazingly fast solution based on algebraic multigrid method using gpu. *Advances in Water Resources* 171, 104340 (2023)
6. Khachkova, T., Lisitsa, V., Reshetova, G., Tcheverda, V.: Gpu-based algorithm for evaluating the electrical resistivity of digital rocks. *Computers and Mathematics with Applications* 82, 200-211 (2021)
7. Quintal B., Steeb H., Frehner M., Schmalholz S. M. Quasi-static finite-element modeling of seismic attenuation and dispersion due to wave-induced fluid flow in poroelastic media. *Journal of Geophysical Research* – V. 116 – N. B01201 – pp. 1-17 – 2011
8. Rubino, J.G., Caspari, E., Miller, T.M., Milani, M., Barbosa, N.D., Holliger, K.: Numerical upscaling in 2-d heterogeneous poroelastic rocks: Anisotropic attenuation and dispersion of seismic waves. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 121(9), 6698-6721 (2016)
9. Solovyev, S., Lisitsa, V.: Field-split iterative solver vs direct one for quasi-static biot equation. In: Voevodin, V., Sobolev, S., Yakobovskiy, M., Shagaliev, R. (eds.) *Supercomputing*. pp. 86-99. Springer Nature Switzerland, Cham (2023)



10. Solovyev, S., Novikov, M., Lisitsa, V.V.: Numerical solution of anisotropic biot equations in quasi-static state. In: Computational Science and Its Applications - ICCSA 2022 Workshops - Malaga, Spain, July 4-7, 2022, Proceedings, Part II. pp. 310{327 (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-10562-3\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-031-10562-3_23)
11. Solovyev, S., Novikov, M., Lisitsa, V.: A numerical investigation of wave-induced fluid flows in anisotropic fractured porous media. *Computers & Mathematics with Applications* 140, 78-88 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.03.013>
12. Соловьев С.А., Новиков М.А., Лисица В.В. Численное решение уравнений Био анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической постановке для численного решения задачи апскейлинга. *Вычислительные методы и программирование* – Т. 24. – № 1 – С. 67-88 – 2023
13. Stuben K. A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics* – V. 128 – N. 1-2 – pp. 281-309 – 2001
14. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. – New York: PWS Publishing, 1996.

© С. А. Соловьев, В. В. Лисица, М. А. Новиков, 2024