

*Е. Н. Шер*

## **Расчет паспорта прочности хрупких пород в двухмерной постановке**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт горного дела им. Н.А. Чинакала» СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация  
e-mail: ensher@gmail.com

**Аннотация.** Расчет паспорта прочности в двухмерной постановке проводится по методу, разработанному А.А. Гриффитсом для определения напряжений, вызывающих начало разрушения твердого тела. По Гриффитсу прочность твердых тел определяется содержащимися в них трещинами и разрушение начинается, когда происходит развитие той из них, ориентация которой при заданных напряжениях вызывает ее развитие. Гриффитс рассматривал двухосное нагружение пластины, содержащей произвольно ориентированные эллиптические полости заданного размера, моделирующие критические трещины, определяющие разрушение. Напряженное состояние вокруг полости находилось из упругого решения Инглиса, которое позволяло определить максимальное растягивающее напряжение вдоль поверхности полости. Критерием разрушения служило достижение его величины критического значения. В настоящей работе в качестве модели трещины рассматривался произвольно ориентированный относительно главных осей напряжений разрез заданной длины. Особенностью новой модели является рассмотрение развития трещины при ее раскрытии и сдвиге ее берегов при смыкании. Рассмотрено взаимодействие берегов трещины при их сдвиге по закону сухого трения Кулона. Расчетами определено влияние параметров трения на границы разрушения в двухмерном поле напряжений.

**Ключевые слова:** прочность твердого тела, трещина, двухмерное поле напряжений, развитие трещины, сухое трение

*E. N. Sher*

## **Calculation of the strength passport of brittle rocks in a two-dimensional formulation**

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,  
Russian Federation  
e-mail: ensher@gmail.com

**Abstract.** Calculation of the strength passport in a two-dimensional formulation is carried out according to the method developed by A.A. Griffiths to determine the stresses that cause the onset of destruction of a solid. According to Griffiths, the strength of solids is determined by the cracks they contain, and destruction begins when the development of one of them occurs, the orientation of which at given stresses causes its development. Griffiths considered biaxial loading of a plate containing arbitrarily oriented elliptical cavities of a given size, simulating critical cracks that determine destruction. The stress state around the cavity was found from the Inglis elastic solution, which made it possible to determine the maximum tensile stress along the surface of the cavity. The criterion for destruction was the achievement of its critical value. In this work, a section of a given length, arbitrarily oriented relative to the main stress axes, was considered as a crack model. A feature of the new model is the consideration of the development of a crack during its opening and the shift of its edges

during closure. The interaction of crack faces during their shear according to Coulomb's law of dry friction is considered. Calculations determined the influence of friction parameters on fracture boundaries in a two-dimensional stress field.

**Keywords:** solid strength, crack, two-dimensional stress field, crack development, dry friction

### *Введение*

Совершенствование технологий добычи полезных ископаемых в горном деле повышает интерес к определению характеристик горных пород, связанных с их разрушением. Представительные данные об условиях разрушения породы дает ее паспорт прочности, в котором в пространстве напряжений выделены области возможного разрушения. Существует много способов определения границ таких областей. Широко применяется для этой цели при описании свойств хрупких материалов критерий разрушения Кулона – Мора. В работе [ 1] для горных пород обосновывается использование линейной огибающей кругов Мора. Интересный подход для определения условий разрушения предложил в 1924г. для двухосного напряженного состояния А.А. Гриффитс [2]. Гриффитс рассматривал двухосное нагружение пластины, содержащей произвольно ориентированные эллиптические полости заданного размера, моделирующие критические трещины, определяющие разрушение. Напряженное состояние вокруг полости находилось из решения Инглиса [3], которое позволяло определить максимальное растягивающее напряжение вдоль поверхности полости. Считается, что разрушение начинается, когда такое напряжение становится равным некоторому критическому постоянному значению. В итоге Гриффитс установил, что если  $-3\sigma_p < \sigma_1 < \sigma_2$ , то  $\sigma_2 = \sigma_p$ , если же  $\sigma_1 < -3\sigma_p$ , то разрушение происходит, когда

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8\sigma_p(\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \quad (1)$$

Из этого соотношения следует, что прочность при одноосном сжатии  $\sigma_c$  в 8 раз больше прочности на растяжение  $\sigma_p$ . Качественно полученный результат согласуется с данными экспериментов по разрушению горных пород и хрупких металлов, но при этом отношение  $\sigma_c/\sigma_p$  может изменяться в диапазоне от 3 до 14. Этот недостаток был частично устранен Макклинтоком и Уолшем [4], которые учли возможное смыкание берегов эллиптической полости и влияние трения при их проскальзывании. Обзор полученных результатов и сравнение с экспериментом приведены в работе [5].

В настоящей работе была сделана попытка рассчитать для хрупкой среды форму границы области разрушения в плоскости напряжений основываясь на подходе Гриффитса – рассмотрении условий роста произвольно ориентированной трещины. При этом трещина рассматривается, как тонкий разрез заданной длины  $2l$ . Предполагается, что развитие трещины в двухосном поле напряжений происходит по критерию обобщенного нормального разрыва, введенного Г.П. Черепановым [6].

### Постановка задачи

Рассматривается напряженное состояние плоскости с трещиной в виде разреза в двумерном поле внешних главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$ , действующих вдоль осей  $x, y$ . Трещина расположена вдоль оси  $x'$  под углом  $\beta$  к оси  $x$ . Берега трещины предполагаются свободными от нагрузок. Поле внешних напряжений создает на линии разреза напряжения в локальной системе координат  $x', y'$ , связанной с трещиной:

$$\begin{aligned}\sigma'_{yy} &= \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta \\ \sigma'_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \beta \cos \beta\end{aligned}\quad (2)$$

Принимаем, что во втором квадранте поля  $\sigma_1, \sigma_2$ :  $\sigma_2 = \sigma_y > 0, \sigma_1 = \sigma_x = -\lambda \sigma_y$

В этом случае нагрузка на верхний берег трещины в дополнительной задаче составит:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_y (\cos^2 \beta - \lambda \sin^2 \beta) \\ \tau_n &= \sigma_y (1 + \lambda) \sin \beta \cos \beta\end{aligned}\quad (3)$$

Отметим, что  $\sigma_n > 0$  при  $\lambda < \operatorname{ctg}^2 \beta$  или при  $\beta < \beta_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Соотношения (3) определяют коэффициенты интенсивности (КИИ) трещины:

$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi l}, K_{II} = \sigma_\tau \sqrt{\pi l}$ . По критерию обобщенного нормального разрыва развитие трещины определяется по достижению критической величины  $K_{Ic}$  интенсивности максимального тангенциального растягивающего напряжения, которое определяется по формуле:

$$K_{\theta\theta}(\lambda, \beta) = \frac{K_I}{4} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) [1 + 3 \operatorname{sign}(K_I) \sqrt{1 + 8\alpha^2}] = K_{Ic} = \sigma_p \sqrt{\pi l}\quad (4)$$

Здесь  $\theta$ - угол, при котором  $\sigma_\theta$  максимально:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right], \quad \alpha = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{(1+\lambda) \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \lambda \sin^2 \beta}$$

По этим формулам для каждого  $\lambda$  и  $\beta$  в диапазоне  $0 < \beta < \beta_0$  рассчитывался угол  $\theta$  и по (4) находилось минимальное значение  $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / \sigma_p$  и соответствующее ему значение  $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / \sigma_p = -\lambda \sigma_y / \sigma_p$ . Данные расчетов для разных  $\lambda$  приведены в табл. 1

## Критические значения напряжений при развитие трещины разрыва

$\lambda$	0	0.5	1	2	5	10	20	40	100
$\sigma_x/\sigma_p$	0	-0.44	-0.77	-1.22	-1.95	-2.7	-3.88	-5.48	-8.7
$\sigma_y/\sigma_p$	1	0.87	0.77	0.61	0.39	0.27	0.19	0.137	0.087

Зависимость  $\bar{\sigma}_y(\bar{\sigma}_x)$ , определяющая границу области разрушения нормальным разрывом приведена на графике рис.1 кривой 1.

При  $\beta > \beta_0$  возможно развитие трещины при сдвиге сомкнувшихся берегов. В случае смыкания можно принять  $K_I = 0$ ,  $K_{II} \neq 0$ . При этом тангенциальные напряжения в вершинах трещин определяются выражением:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi s}} \left[ -3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Максимальное значение  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  при  $\vartheta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  равно  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^{max} = \frac{2K_{II}}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi s}}$ .

Согласно критерию обобщенного нормального разрыва примем за условие развития трещины при сдвиге равенство:

$$\frac{2K_{II}}{\sqrt{3}} = K_{Ic} = \sigma_p \sqrt{\pi l}. \quad (5)$$

Значение  $K_{II}$  определяется условия взаимодействия берегов трещины при их проскальзывании. Примем, как и в работе [7], что силы такого взаимодействия определяются законом Кулона:  $f_t = k + \rho\sigma_n$ , где  $k$  и  $\rho$  – коэффициенты сцепления и трения.

Во втором квадранте плоскости  $\sigma_x, \sigma_y$  при  $\beta > \beta_0$  смещение верхнего и нижнего берегов  $u_x^+ > 0, u_x^- < 0$ , соответственно этому силы трения направлены в противоположную сторону относительно смещений:  $f_t^+ = f_t, f_t^- = f_t$ . На верхнем берегу трещины сдвигающее усилие в дополнительной задаче составит:  $\tau = \sigma'_{xy} - k - \rho\sigma_n$ . Отсюда с учетом (2), (3):

$$\tau = \sigma_y(1 + \lambda) \sin\beta \cos\beta - k + \rho\sigma_y(\cos^2\beta - \lambda \sin^2\beta).$$

Из равенства  $\frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 0$  находим соотношение для определения угла  $\beta_*$  при котором  $\tau$  максимально:  $\operatorname{ctg}(2\beta_*) = \rho = \operatorname{tg}\gamma$ , где  $\gamma$  – угол трения. Отсюда следует:  $\beta_* = \pi/4 - \gamma/2$ ,  $\cos(2\beta_*) = \sin\gamma$ ,  $\sin(2\beta_*) = \cos\gamma$

При смыкании берегов необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\beta_* > \beta_0$ , из которого следует ограничение  $\lambda > \sqrt{(1 + \sin\gamma)/(1 - \sin\gamma)}$ . При выполнении этого условия

$$\tau_* = \sigma_y \frac{(1 + \lambda) + (1 - \lambda)\sin\gamma}{2\cos\gamma} - k$$

Из выражения для коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II} = \tau_* \sqrt{\pi l}$  и критерия (5) получаем значение критического напряжения, вызывающего рост

трещины:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_p} = \frac{\sqrt{3}\cos\gamma(1+2k/(\sqrt{3}\sigma_p))}{(1+\lambda)+(1-\lambda)\sin\gamma} \quad (6)$$

Исключая  $\lambda$  из этого соотношения и равенства  $\sigma_x = -\lambda\sigma_y$  получаем зависимость  $\bar{\sigma}_y(\bar{\sigma}_x)$ , определяющая границу области разрушения сдвигом:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sqrt{3}\cos\gamma}{1+\sin\gamma} + \bar{\sigma}_x \frac{(1-\sin\gamma)}{(1+\sin\gamma)} \quad (7)$$

Для случая  $k=0$  зависимости  $\bar{\sigma}_y(\bar{\sigma}_x)$  приведены на рис.1 для разных значений угла трения:  $\gamma = 0, 12^\circ, 24^\circ, 45^\circ$  прямыми 2 – 5, Для сравнения, на графике этого рисунка кривой 6 приведена граничная зависимость Гриффитса.

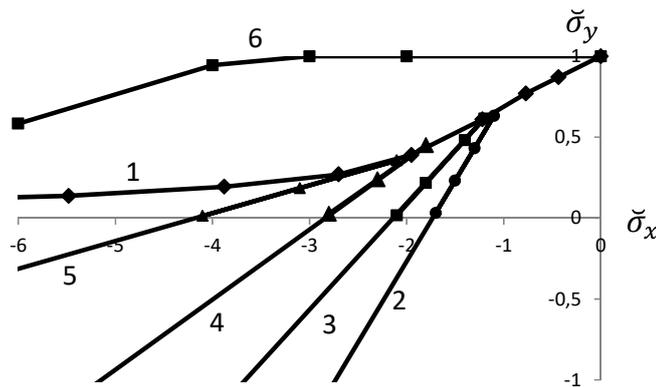


Рис.1 Границы разрушения хрупкого тела во втором и третьем квадранте плоскости главных напряжений при  $k=0$

В третьем квадранте плоскости  $\sigma_x, \sigma_y$  оба компонента главных напряжений сжимающие:  $\sigma_2 = \sigma_y < 0, \sigma_1 = \sigma_x = \lambda\sigma_y$  В этих соотношениях  $\lambda$  по сравнению с рассмотренным выше вариантом второго квадранта отличается знаком и выражение для критического напряжения получается заменой в (6)  $\lambda$  на  $-\lambda$  :

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_p} = \frac{\sqrt{3}\cos\gamma(1+2k/\sqrt{3}\sigma_p)}{(1-\lambda)+(1+\lambda)\sin\gamma}$$

Исключая  $\lambda$  из этого соотношения и равенства  $\sigma_x = \lambda\sigma_y$ , получаем тоже соотношение (7), что и демонстрирует рис.1.

Влияние коэффициента сцепления  $k$  в законе Кулона может быть существенным при расчете сдвигового разрушения. В соответствии с (6) при  $k > 0$  точки прямой, соответствующей границе разрушения переносятся радиально пропорционально множителю  $m = (1 + \frac{2k}{\sqrt{3}\sigma_p})$ . Для примера рассчитан вариант  $\frac{k}{\sigma_p} = 1$ ,  $m \approx 2.155$ . Результат расчетов приведен на рис.2 для разных значений угла трения:  $\gamma = 0, 12^\circ, 24^\circ, 45^\circ$  прямыми 2 – 5. Кривые 6 и 7 соответствуют границе разрушения, определенные по критерию Кулона-Мора и Гриффитса. Из графиков на этом рисунке видно, что отношение  $\sigma_c/\sigma_p$  увеличилось с 4 при  $k=0$ ,  $\rho = 1$  (рис.1) до 9 при  $k=\sigma_p$ ,  $\rho = 1$

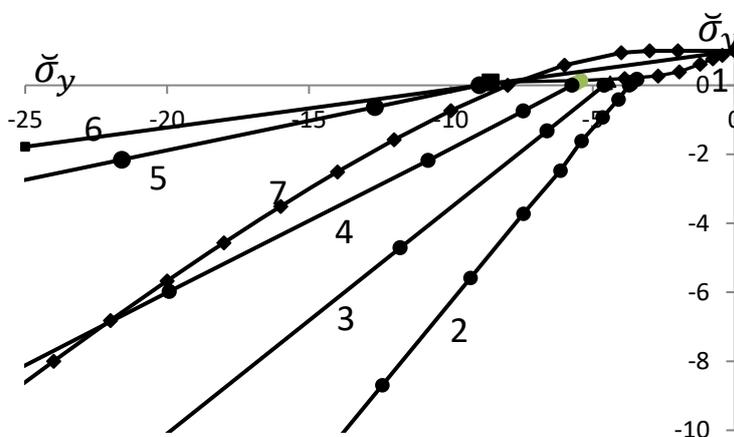


Рис. 2 Границы разрушения хрупкого тела во втором и третьем квадранте плоскости главных напряжений. Расчет проведен для случая  $k=\sigma_p$

### Обсуждение

В настоящей работе проведены в двумерной постановке расчеты формы границы области разрушения в плоскости напряжений основываясь на подходе Гриффитса – рассмотрении условий роста произвольно ориентированной трещины, моделируемой разрезом критической длины. В отличие от работы Гриффитса, в расчетах учитывалось смыкание берегов разреза в зависимости от внешнего напряженного состояния. При расчетах проскальзывания берегов трещины для определения их нагружения использовался закон Кулона. В качестве критерия роста трещины применен критерий обобщенного нормального разрыва, введенный Г.П. Черепановым.

Расчеты показали значительное отличие формы границы области разрушения в плоскости напряжений по сравнению с полученной Гриффитсом. Особенно такое отличие велико во втором квадранте плоскости нагружения, где имеются растягивающие напряжения.

## *Заключение*

Расчеты по модифицированной модели Гриффитса показали значительное отличие формы границы области разрушения в плоскости напряжений по сравнению с полученной Гриффитсом. Особенно такое отличие велико во втором квадранте плоскости нагружения, где имеются растягивающие напряжения. Кривая Гриффита здесь выпуклая, в то время, как по модифицированной теории – вогнутая. Чтобы выяснить причины такого отличия, требуются дополнительные исследования. Прямая Кулона-Мора при этом занимает промежуточное положение, близкое к прямой разрушения, определяемого сдвигом с углом трения  $\gamma = 45^\circ$ .

Положительным результатом новой модели можно считать учет параметров трения берегов трещин при проскальзывании и определение их влияния на расположение границы области разрушения в плоскости напряжений по сравнению с полученной Гриффитсом.

Отмечу, что теоретический подход по расчету паспорта прочности еще далек от завершения и определяющее влияние здесь будет иметь эксперимент.

## *Благодарности*

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и образования РФ (№ гос. регистрации 121062200075-4).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Машуков В.И., Пирля Н.В., Барышников В.Д. Структура горной породы и ее паспорт прочности // ФТПРПИ.–1990. –№3.–С. 21–27
2. Griffiths A.A. The phenomena of rapture , Proc. 1<sup>st</sup> Int. Con. Appl. Mech. (Delft), 1924, pp.55-63
3. C.E. Inglis, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners," Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol. 55, London, 1913, pp. 219–230
4. F. A. McClintock and J. B. Walsh, "Friction on Griffith Cracks in Rocks Under Pressure," Proceedings of the Fourth U. S. National Congress of Applied Mechanics, Berkeley, Calif., vol. 2, 1962, pp. 1015-1021.
5. E. Hoek and Z.T. Bieniawski Brittle Rock Fracture Propagation In Rock Under Compression// International Journal of Fracture Mechanics, 1965, - 1, №3, pp 137-155
6. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах // ПММ –1966.–30. Вып. 1, – С.82–93
7. Черепанов Г.П. Механика разрушения.–М. Ижевск: Институт компьютерных исследований. –2012. – 872 с

© Е. Н. Шер, 2024