

*М. А. Новиков<sup>1\*</sup>, Е. И. Роменский<sup>1</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup>*

## **Численное моделирование нагружения флюидонасыщенного образца породы на основе термодинамически согласованной модели пороупругой среды**

<sup>1</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики, г. Новосибирск, Российская Федерация

\* e-mail: novikovma@ipgg.sbras.ru

**Аннотация.** В работе представлен численный анализ задачи нагружения образца породы на основе термодинамически согласованной модели пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической постановке. Кратко приведены вывод уравнений квазистатического приближения, описание конечно-разностного метода решения краевой задачи расчета смещений твердой фазы и флюида в среде. Для верификации алгоритма рассмотрена задача нагружения периодического слоистого образца. Численные эксперименты по нагружению трещиноватого образца показывают возможности применения методики для изучения индуцированных сейсмической волной флюидопотоков.

**Ключевые слова:** пороупругость, квазистатика, конечно-разностные методы

*М. А. Novikov<sup>1\*</sup>, E. I. Romenski<sup>1</sup>, V. V. Lisitsa<sup>2</sup>*

## **Numerical loading of the fluid-saturated rock sample based on the thermodynamically compatible model of poroelastic media**

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Novosibirsk, Russian Federation

\* e-mail: novikovma@ipgg.sbras.ru

**Abstract.** The paper presents a numerical analysis of the problem of loading a rock sample based on a thermodynamically compatible model of a poroelastic fluid-saturated medium in a quasi-static formulation. The derivation of the quasi-static approximation equations and a description of the finite-difference method for solving the boundary value problem of calculating the displacements of solid phase and fluid in a medium are briefly presented. To verify the algorithm, the problem of loading a periodic layered sample is considered. Numerical experiments on loading a fractured sample show the possibility of using the technique to study seismic wave-induced fluid flows.

**Keywords:** poroelasticity, quasi-static modeling, finite-difference methods

### ***Введение***

Современные исследования в области физики горных пород включают в себя изучение неупругого поведения среды, приводящего к поглощению энергии и затуханию сейсмических волн. Обнаружено, что характер затухания может служить индикатором внутренней структуры неоднородной (трещиноватой, кавернозной) породы [1]. Локализация и характеристика зон трещиноватости, про-

гнозирование изменений трещиноватых формаций особенно востребованы при разработке нефтегазовых коллекторов, захоронении сжиженной углекислоты [2], выработке геотермической энергии [3]. Прохождение волн в трещиноватой среде с флюидом приводит как к мезомасштабным потокам между трещинами и вмещающей породой, так и к микромасштабным потокам в поровом пространстве. В первом случае явление называют «индуцированными волной потоками флюидов» (от английского «wave-induced fluid flow», WIFF) [4, 5]. Интенсивность WIFF зависит от характерных частот волновых процессов, контраста между физическими свойствами вмещающей породы и наполнителя трещин, от связности трещин. На масштабе пор потоки известны в зарубежных источниках под названием «squirt-flow» [6], и, как правило, изучается их зависимость от явной геометрии пор, физических свойств флюида. Поскольку эти потоки происходят на существенно разных масштабах, их одновременный учет в рамках одного численного эксперимента практически невозможен. Кроме того, если используемая математическая модель не позволяет рассматривать предельные переходы к однофазным средам, нельзя в рамках этой модели описать оба типа потоков. Если первая проблема вызвана недостатком вычислительных мощностей современных машин и определяется скорее техническим прогрессом, то от второго недостатка можно избавиться введением универсальной математической модели двухфазной среды с возможностью разделения фаз.

В настоящее время активно развивается подход к описанию пороупругой среды – смеси твёрдой и жидкой фаз – на основе термодинамически согласованной модели [7, 8]. Теория термодинамически согласованных законов сохранения предоставляет широкие возможности для построения новых хорошо обусловленных математических моделей, удовлетворяющих законам термодинамики необратимых процессов. Отметим, что определяющие уравнения двухфазной среды кажутся предпочтительнее, чем уравнения известной модели пороупругости Био [5, 9], поскольку обладают хорошими математическими свойствами. Кроме того, двухфазная модель позволяет описывать среды во всем интервале пористости от 0 до 1, а также рассматривать неоднородные среды с переменной пористостью, включая области чистой жидкости и чистой деформируемой среды.

В работе представлен алгоритм численного расчета напряженно-деформированного состояния образца неоднородной пористой флюидонасыщенной среды. Вначале описываются уравнения термодинамически согласованной модели пороупругой среды (ТСМПС), а также их квазистатическая формулировка. Далее ставится задача нахождения напряженно-деформированного состояния образца, для численного решения которой применяется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках. Для демонстрации возможностей применения результирующий алгоритм используется в задаче одноосного нагружения слоистого образца с подобластями, близкими к однофазным, и трещиновато-пористого образца для WIFF разных типов.

**Термодинамически согласованная модель пороупругой среды в квазистатической постановке**

Рассмотрим термодинамически согласованные уравнения для распространения волн малой амплитуды в двумерной постановке (1) [7].

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \\
 \frac{\partial q^k}{\partial t} + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_k} &= -\frac{c_1 c_2}{\theta} q^k, & \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_k} &= -i \frac{c_1 c_2}{\theta} \omega w^k, \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + K \frac{\partial v^k}{\partial x_k} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\rho} (\rho_2 - \rho_1) K \frac{\partial q^k}{\partial x_k} &= 0, & p + K \frac{\partial u^k}{\partial x_k} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\rho} (\rho_2 - \rho_1) K \frac{\partial w^k}{\partial x_k} &= 0, \\
 \frac{\partial s_{ik}}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_k} + \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right) &= -\frac{s_{ik}}{\tau}. & s_{ik} - \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial x_k} + \frac{\partial u^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u^j}{\partial x_j} \right) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1} \tag{2}$$

Здесь повторяющиеся индексы означают суммирование. Уравнения (1) описывают поля скорости смеси фаз  $\vec{v} = (v^1 \ v^2)^T$  и относительной скорости флюида  $\vec{q} = (q^1 \ q^2)^T$ , давление флюида  $p$  и девиатор тензора напряжений смеси

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

В коэффициенты уравнений входят плотности жидкой  $\rho_1$  и твердой фаз  $\rho_2$ ; объемные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и массовые  $c_1$ ,  $c_2$  доли жидкой и твердой фаз ( $\alpha_1$  – пористость), модуль сжатия смеси  $K$  и модуль сдвига твердой фазы  $\mu$ ; плотность смеси  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ ; параметр межфазного трения  $\theta$  и время релаксации  $\tau$ . Отметим, что далее рассматривается предельный случай  $\tau \rightarrow \infty$ , для которого источник в правой части последнего уравнения системы (1) зануляется.

Для описания напряженно-деформированного состояния образца будем использовать уравнения (1) в квазистатическом приближении, поскольку в рассматриваемый текущий момент времени можно предполагать состояние равновесным. Модификация уравнений (1) для квазистатического случая производится отбрасыванием членов уравнений, описывающих ускорения, переходом от скоростей к смещениям и переходом из временной в частотную область преобразованием Фурье с частотой  $\omega$ . В результате получим систему (2). Из системы (2) можно исключить компоненты тензора напряжений и давления флюида, сводя ее к системе уравнений второго порядка в смещениях (3). Здесь

$N = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\rho} K(\rho_2 - \rho_1)$ ,  $L = \frac{c_1 c_2}{\theta} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}$ . Таким образом, вначале решается система

(3), затем из известных полей смещений находятся поля напряжений и давления флюида с помощью уравнений (2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left( K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + N \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial u^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u^2}{\partial x_1} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \left( K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + N \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial u^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u^2}{\partial x_1} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ K \left( \frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \right) + N \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} \right) \right] &= iL\omega w^1, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ K \left( \frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \right) + N \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} \right) \right] &= iL\omega w^2. \end{aligned} \quad (3)$$

### Постановка задачи нагружения образца

Для постановки краевой задачи в ограниченной области  $\Omega$  необходимо дополнить уравнения (3) условиями на границе  $\partial\Omega$ . На границе области задается нормальное напряжение и ставятся условия непротекания:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} |_{\partial\Omega} &= \vec{\phi}, \\ \mathbf{w} \cdot \vec{n} |_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$ , а  $\vec{\phi}$  – достаточно гладкая функция, определенная на границе. Отметим, что в граничные условия входят компоненты полного тензора напряжений  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + P\mathbf{I}$ .

Ограничимся рассмотрением области  $\Omega = \{\vec{x} : x_1 \in [x_{10}, x_{11}], x_2 \in [x_{20}, x_{21}]\}$  – прямоугольник с границами, расположенными параллельно осям координат. В этом случае на частях границы, параллельных оси  $Ox_1$  задаются величины  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $w_2$ , а на частях границы, параллельных  $Ox_2$  величины  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $w_1$ .

### Численный метод

Для численного решения краевой задачи (3), (4) в прямоугольной области  $\Omega$  система уравнений (3) аппроксимируется явной условно-устойчивой конечно-разностной схемой второго порядка на разнесенных прямоугольных регулярных сетках, которая в результате сводится к системе линейных алгебраических урав-

нений для смещений, определенных в узлах сетки, причем разные компоненты решения определяются в разных группах узлов с полуцелыми индексами по соответствующему направлению, аналогично подходу из [10]. Для замыкания результирующей СЛАУ при помощи метода погруженной границы [11] для узлов вблизи границы, где шаблоны схемы выходят за расчетную область, неизвестные в несуществующих узлах выражаются через величины в узлах внутри области при помощи аппроксимации граничных условий (4). Кроме того, поскольку свойства среды не определены во всех узлах, где аппроксимируются уравнения системы (3), для осреднения коэффициентов с сохранением порядка аппроксимации применяется метод баланса [12].

### *Численные эксперименты по одноосному нагружению образца*

Мы рассмотрим три задачи одноосного нагружения квадратного образца породы. Первая задача решается для верификации метода, вторая и третья задачи демонстрируют возможности его применения для изучения мезомасштабных флюидопотоков двух типов.

Поскольку наиболее распространенной моделью описания пористой среды является модель Био [5,9], подходящим для верификации выглядит сравнение результатов между этими двумя моделями. Однако в динамической постановке было показано, что для совпадения скоростей волн в средах, описываемых параметрами моделей ТСМПС и Био необходимо рассматривать разные значения одних и тех же параметров [7]. Более того, не установлено явной зависимости между параметрами, формирующими одни и те же коэффициенты. В частности, параметр межфазного трения  $\theta$  не имеет известной нам зависимости от проницаемости и вязкости жидкости, и на данный момент известны лишь эмпирически полученные значения. В квазистатической же постановке, что можно увидеть из работы [10], уравнения двух моделей хоть и имеют одинаковую структуру, но коэффициенты в них в общем случае различаются. Это вызвано разными определяющими законами построения моделей. Поэтому непосредственное сравнение результатов расчетов на основе ТСМПС и модели Био может проводиться лишь на качественном уровне.

*Таблица 1*

Физические свойства материалов

Параметр	Слой 1	Слой 2	Вмещ. порода	Трещины
$\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup>	1040	1040	1040	1040
$\rho_2$ , кг/м <sup>3</sup>	2500	2500	2500	2500
$K$ , ГПа	46	2.34	39.4	9.48
$\mu$ , ГПа	35.85	35.85	24.5	24.5
$\theta$	$3.36 \cdot 10^{-9}$	$3.36 \cdot 10^{-9}$	$3.36 \cdot 10^{-13}$	0.336
$\alpha_1$	0.001	0.999	0.05	0.2

Таким образом, для верификации предложенного метода рассматривается задача одноосного нагружения периодически слоистой образца (составленного из слоев твердой и жидкой фаз) поперек слоев. Расчетная область – прямоугольная со сторонами размером 8 и 1600 м, образованная слоями двух разных сред (параллельными длинной стороне) толщиной 1 м (рис. 1, слева). Физические свойства сред указаны в табл. 1. Значения пористости в слоях близки к 0 и 1, поэтому для сравнения с результатами численных экспериментов рассматривается аналитическая оценка скорости продольной волны поперек слоистости в упруго-жидкой среде на основе дисперсионного соотношения С. М. Рытова [12]. Для аналитической оценки используются значения плотностей и упругих модулей отдельных фаз (модули сжатия твердой и жидкой фаз  $K_1 = 46.9$  ГПа,  $K_2 = 2.34$  ГПа). Для численной оценки скорости по результатам решения системы (3) используется метод апскейлинга [10]. Сравнение результатов (рис. 1 справа) для диапазона частот от 0.01 Гц до 1 кГц показывает достоверность численного решения, поскольку относительное расхождение оценок не превышает 4% и вызвано по большей части краевыми эффектами при решении подобной задачи, что было исследовано на примере модели Био в работе [10]. Точность оценки демонстрирует применимость модели ТСМПС для среды, сформированной однофазными подобластями.

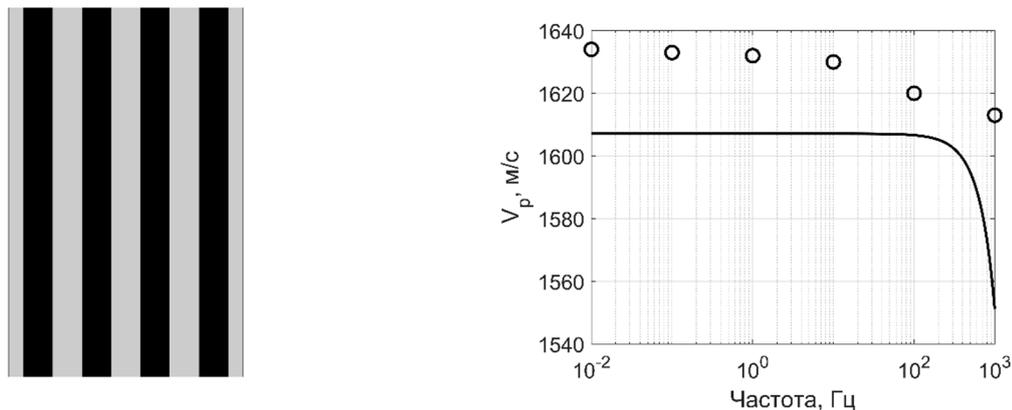


Рис. 1. Схематичное изображение слоистой среды (слева), оценка фазовой скорости продольной волны в слоистой среде (справа): сплошная линия – аналитическая оценка, кружки – численная оценка

Второй и третий численные эксперименты проведены для сравнения мезомасштабных флюидопотоков в трещиноватой среде на разных частотах. Рассматривается одноосное нагружение (вдоль горизонтальной оси  $Ox_1$ ) синтетического трещиноватого образца с высокой степенью связности трещин, построенного статистическими методами (рис. 2, а) [13]. Свойства вмещающей породы и среды в трещинах указаны в табл. 1. Размеры образца 1 x 1 м, трещины представлены

прямоугольными подобластями с размерами 0.004 x 0.03 м. Эти микромасштабные трещины формируют кластеры, проходящие через всю область. Для демонстрации изменения характера флюидопотоков рассматривается случай низкой и высокой частот, поскольку эти случаи соответствуют проявлению потоков WIFF разного характера – между вмещающей средой и трещинами на низкой частоте, и между трещинами – на высокой [1]. В частности, рассматриваются значения частоты 10 Гц и 1 МГц.

На рис. 2 (б, в) представлены результирующие поля давления флюида в расчетной области. В случае 10 Гц (рис. 2, б) более плавный характер изменения давления между трещинами и вмещающей породой свидетельствует об интенсивных флюидопотоках из трещин во вмещающую породу, выходящих за пределы трещин. Сильные контрасты отмечаются в окрестностях границ трещин, и поле давления отражает не структуру микромасштабной неоднородности, а наличие мезомасштабных кластеров. Напротив, в случае частоты 1 МГц (рис. 2, в) зона относительно высокого давления ограничивается материалом в трещинах, а вне них давление равномерно. Такое распределение давления свидетельствует о значительных флюидопотоках исключительно по системе трещин. От границ трещин во вмещающую породу давление изменяется плавно и относительно незначительно. Отметим, что отрицательные значения давления имеют смысл сжатия. Поведение давления флюида на разных частотах качественно схоже с результатами вычислений на основе модели Био [1]. Таким образом, результаты демонстрируют возможности применения модели как в случае однофазных подобластей, так и в случае двухфазной неоднородной среды.

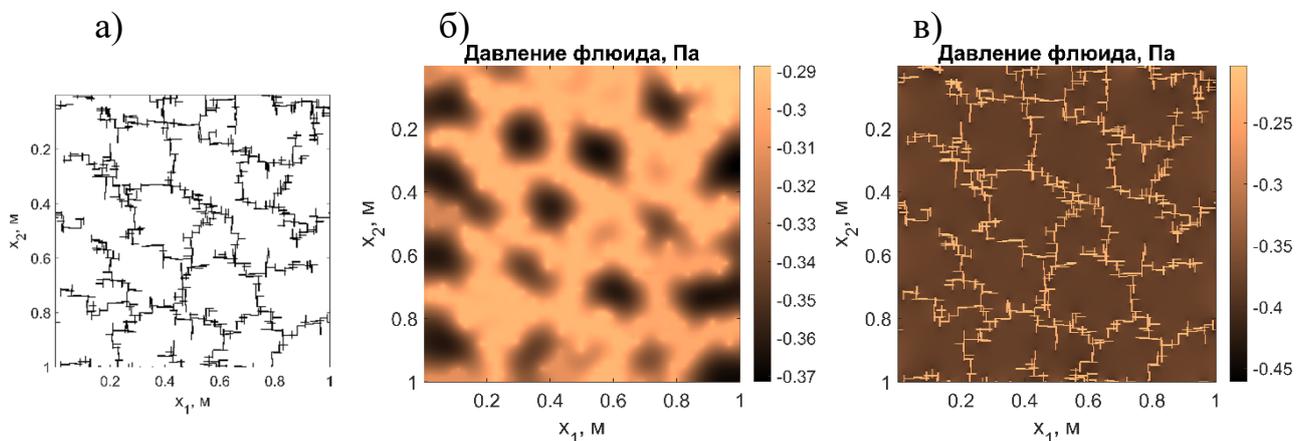


Рис. 2. Модель трещиноватой среды, черным показаны трещины (а); поле давления флюида в трещиноватой среде при 10 Гц (б) и 1 МГц (в)

### Заключение

В работе рассматривается квазистатическое приближение математической модели пороупругой среды на основе термодинамически согласованной системы законов сохранения в двумерной постановке. Представленные уравнения служат основой для алгоритма численного решения задачи одноосного нагружения не-

однородного пороупругого флюидонасыщенного образца. Численные эксперименты по нагружению слоистого и трещиноватого образцов породы с флюидом демонстрируют возможности использования модели как в случае однофазных включений, так и в случае двухфазной среды с промежуточным значением пористости. В частности, на примере трещиноватой среды с высокой связностью показан различный характер распределения давления флюида в среде, свидетельствующий о интенсивном проявлении индуцированных флюидопотоков и между трещинами и вмещающей породой, и между пересекающимися трещинами. В дальнейшем планируется количественное изучение затухания и дисперсии в трещиновато-пористых средах с использованием метода апскейлинга на основе представленного в работе подхода и эффективного представления пористости. С другой стороны, за счет достоверности работы подхода в случае отдельных фаз в будущем планируется изучение микромасштабных флюидопотоков с вовлечением явной геометрии порового пространства.

### *Благодарности*

Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду за поддержку исследований в рамках гранта РФФ № 19-77-20004-П.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rubino J. G., Muller T. M., Guarracino L., Milani M., Holliger K. Seismoacoustic signatures of fracture connectivity // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2014. – Vol. 119 – № 3 – P. 2252-2271.
2. Huang F., Bergmann P., Juhlin C., Ivandic M., Luth S., Ivanova A., Kempka, T., Hennings, J., Sopher, D., Zhang, F. The First post-injection seismic monitor survey at the ketzin pilot co2 storage site: results from time-lapse analysis // *Geophysical Prospecting*. – 2018. – Vol. 66. – № 1. – P. 62-84.
3. Salaun N., Toubiana H., Mitschler J.B., Gigou G., Carriere X., Maurer V., Richard A. Highresolution 3d seismic imaging and refined velocity model building improve the image of a deep geothermal reservoir in the upper rhine graben // *The Leading Edge*. – 2020. – Vol. 39. – № 12. – P. 857-863.
4. Muller T. M., Gurevich B., Lebedev M. Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks – a review // *Geophysics*. – 2010. – Vol. 75 – P. 75A147–75A164.
5. Caspari E., Novikov M., Lisitsa V., Barbosa N. D., Quintal B., Rubino J. G., Holliger K. Attenuation mechanisms in fractured fluid-saturated porous rocks: a numerical modelling study // *Geophysical Prospecting*. – 2019. – Vol. 67. – № 4. – P. 935–955.
6. Quintal B., Rubino J. G., Caspari E., Holliger K. A simple hydromechanical approach for simulating squirt-type flow // *Geophysics*. – 2016. – Vol. 81. – № 4. – P. D335–D344.
7. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I., Dumbser M. Modeling wavefields in saturated elastic porous media based on thermodynamically compatible system theory for two-phase solid-fluid mixtures // *Computers and Fluids*. – 2020. – Vol. 206. – P. 104587.
8. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I. Computational model for compressible two-phase flow in deformed porous medium // *ICCSA 2021, LNCS*. – 2021. – Vol. 12949. – P. 224–236.
9. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1956. – Vol. 28 – P. 168-178.

10. Solovyev S., Novikov M., Lisitsa V. A numerical investigation of wave-induced fluid flows in anisotropic fractured porous media // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2023. – Vol. 140. – P. 78-88.
11. Mittal R., Iaccarino G., Immersed boundary methods // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2005. – Vol. 37. – № 1. – P. 239–261.
12. Сибиряков Б.П., Максимов Л.А., Татарников М.А. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. – Новосибирск.: Наука, 1980. – 72 с.
13. Novikov M. A., Lisitsa V. V., Bazaikin Y. V. Wave Propagation in Fractured-Porous Media with Different Percolation Length of Fracture Systems // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2020. – Vol. 41. – № 8. – P. 1533-1544.

© М. А. Новиков, Е. И. Роменский, В. В. Лисица, 2024