

Д. А. Неклюдов^{1}, М. И. Протасов¹*

Моделирование волновых полей квази-продольных волн в трехмерных анизотропных (ТТИ) средах с помощью частотно-зависимых лучей Ломакса

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск,
Российская Федерация
* e-mail: neklyudovda@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В данной статье предложен простой и эффективный метод расчета частотно-зависимых лучей квази-продольных волн в трехмерных трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии. Этот подход аппроксимирует распространение локально плоского фрагмента волнового фронта. Зона чувствительности зависит от длины волны к каждой точке на луче. Для повышения эффективности численной реализации используются приближенные выражения для фазовых и групповых скоростей в предположении слабой анизотропии. Предложенный подход используется для расчета волновых полей прямых квази-продольных волн.

Ключевые слова: лучевой метод, анизотропия, волновые поля

D. A. Neklyudov^{1}, M. I. Protasov¹*

qP - wavefields modelling in three-dimensional TTI media using frequency-dependent Lomax rays

¹ Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
* e-mail: neklyudovda@ipgg.sbras.ru

Abstract. A simple and numerically effective approach for calculating frequency dependent qP-rays in three-dimensional TTI media is presented in this paper. Our method involves propagating a locally plane fragment of wavefront which is sensitive to the distribution of the model parameters in some subvolume of the medium near a ray. The width of the sensitivity area depends on the wavelength in each point on the ray. For numerical realization we apply approximate expressions for phase and group velocities which are valid for weak TTI media. Numerical experiment proves the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: ray method, travel-times, wavelength

Введение

Лучевой метод по-прежнему играет важную роль в сейсмике. На его основе реализованы ключевые процедуры обработки сейсмических данных, такие как лучевая сейсмическая томография и миграция Кирхгоффа. Прежде всего лучевой метод служит для расчета лучевых траекторий и времен первых вступлений сейсмических волн. При численной реализации классического лучевого метода, в следствии высокочастотной аппроксимации, на которой он основан, проявляется “нефизичное” поведение лучей в моделях с наличием существенных неод-

нородностей и резких границ раздела [1, 2]. Как итог, процедуры обработки сейсмических данных, основанные на использовании лучей (например, кинематическая томография) могут приводить к недостоверным результатам. Возникает практическая необходимость ослабить ограничения стандартного лучевого метода, принимая во внимание ограниченность спектров реальных сигналов.

Известно, что на распространение сигналов с ограниченным спектром влияет распределение параметров среды внутри некоторого объема, окружающего луч. Ширина этого объема, т.н. “френелевский объем”, определяется доминирующей частотой сигнала. Было предложено множество подходов, с помощью которых можно с разной степенью эффективности учесть этот факт в лучевом методе: [3-7]. Все они имеют свои преимущества и недостатки, ключевым из которых является вычислительная сложность, которая особенно проявляется при переходе к трехмерному случаю.

В работе [3] был предложен простой, но весьма эффективный подход для аппроксимации процесса распространения широкополосных сейсмических сигналов на основе стандартного лучевого метода. Его суть заключается в том, что при трассировке луча локальная скорость в точке на луче определяется при сглаживании интервальных скоростей вдоль локально плоского участка фронта, причем апертура такого сглаживания выбирается пропорционально длине волны. Система дифференциальных уравнений луча остается практически неизменной, за исключением замены интервальных скоростей на сглаженные вдоль фронта скорости. В дальнейшем мы будем называть лучи, построенные этим методом как лучи Ломакса. В работе [8] разработан алгоритм построения частотно-зависимых лучей Ломакса в трехмерном изотропном случае, а также показана перспективность их применения для сложных моделей. В настоящей статье мы описываем алгоритм построения квазипродольных частотно-зависимых лучей Ломакса в трехмерных трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии. Для повышения численной эффективности мы используем предположение о “слабой” анизотропии, которое, как известно, выполняется в большинстве практических случаев. Это предположение позволяет существенно упростить выражения для фазовых и групповых скоростей. Мы применяем анизотропные лучи Ломакса для расчета волновых полей квазипродольных волн.

Метод трассировки частотно-зависимых лучей Ломакса

Вначале приведем приближенные выражения для фазовой и групповой скорости qP -волн, которые будут необходимы для построения лучей Ломакса в трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии. Как известно, в произвольной анизотропной среде могут распространяться волны трех типов: квазипродольная волна, обозначаемая как qP и две квазипоперечные волны qSV , qSH , каждая из которых соответствует одному из собственных чисел матрицы Кристоффеля. В дальнейшем нас будет интересовать только случай распространения qP -волны. Вектор \vec{p} (вектор медленности) связан с фазовой скоростью V в направлении нормали к фронту, $\vec{p} = \vec{n}/V(\vec{n})$, где \vec{n} есть единичная нормаль к фронту. При изучении распространения qP -волн для параметризации трансвер-

сально-изотропной среды с наклонной осью симметрии используется следующий ставший уже стандартным набор параметров: V_p – фазовая скорость, qP – волны вдоль оси симметрии, два угла, характеризующие положение оси симметрии, θ_{AZ} (азимут), θ_{DIP} (угол наклона относительно вертикали) и два параметра Томсена ε , δ [9]. В общем случае выражения для фазовых и групповых скоростей через параметры модели весьма громоздки и неудобны для численной реализации, поэтому разумно использовать упрощенные их выражения в предположении “слабой” анизотропии. Одно из возможных приближенных выражений фазовой и групповой скоростей qP – волны в случае трансверсально-изотропной среды с произвольным положением оси симметрии выводится в работе [10] (формула 24). Далее мы будем использовать именно их. Пусть \vec{e} – единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии. Сделаем следующие обозначения: пусть $P = |\vec{p}|^2$ – квадрат нормы вектора медленности, а $D = \vec{e} \cdot \vec{p}$ есть скалярное произведение векторов \vec{e} и \vec{p} , $D_N = \vec{e} \cdot \vec{n}$. Фазовая скорость в направлении нормали к фронту определяется как:

$$V^2(\vec{x}, \vec{n}) = V_p^2 \{1 + 2\varepsilon + 2(\delta - 2\varepsilon)D_N^2 - 2(\delta - \varepsilon)D_N^4\}, \quad (1)$$

Приближенное выражение для компонент групповой (лучевой) скорости:

$$v_j = \frac{1}{2} V_p^2 \left\{ \left[2(1 + 2\varepsilon) + 4(\delta - \varepsilon) \frac{D^4}{P^2} \right] p_j + \left[2(\delta - 2\varepsilon)D - 8(\delta - \varepsilon) \frac{D^3}{P} \right] e_j \right\} \quad (2)$$

где p_j и e_j есть компоненты векторов \vec{p} и \vec{e} соответственно.

Далее рассмотрим, как происходит трассировка трехмерных лучей Ломакса в случае трансверсально-изотропных сред. В качестве входных параметров задаются два угла, характеризующие ориентацию единичной нормали волнового фронта φ_{AZ} , φ_{Dip} , где φ_{AZ} – азимутальный угол, φ_{Dip} – угол наклона. Наряду с этим, задается параметр ν , имеющий физическую размерность частоты (“частота луча”). Этот параметр определяет чувствительность луча к вариациям параметров модели. Трассировка состоит из двух этапов: 1) движение вдоль луча, 2) поиск ориентации нормали в новой точке на луче.

Первый этап (1). Пусть луч уже построен до некоторой точки $\vec{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$ (центральная точка). В этой точке задано текущее направление единичной нормали к волновому фронту, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. В точке \vec{x}_p строится плоскость, ортогональная вектору \vec{n} . На этой плоскости вырезается прямоугольник с центром в точке \vec{x}_p , размеры которого зависят от длины волны $\lambda = \frac{V(\vec{x}_p, \vec{n})}{\nu}$ в центральной точке. Здесь $V(\vec{x}_p, \vec{n})$ – значение фазовой скорости в точке \vec{x}_p , вычисляемой по формуле (1), ν – “частота луча”. На выбранном фрагменте волнового фронта задается регулярная сетка, в каждой точке которой определяются значения фазовых скоростей $V(\vec{x}_j, \vec{n})$. Значение сглаженной фазовой скорости вдоль плоского фрагмента фронта вычисляется по формуле:

$$V_{sm}(\vec{x}_p, \vec{n}, v) = \frac{\sum_{j=-N}^N w_j \cdot V(\vec{x}_j, \vec{n})}{\sum_{j=-N}^N w_j}, \quad (3)$$

где w_j весовые коэффициенты сглаживания.

В качестве сглаживающей функции используется двухмерная функция Гаусса [8]. Пусть dt есть шаг по времени при движении вдоль луча. Для того, чтобы продвинуться вдоль луча, применяется следующая схема. В центральной точке \vec{x}_p вычисляется значение сглаженной вдоль фронта фазовой скорости $\bar{V}_p = V_{sm}(\vec{x}_p, \vec{n}, v)$, способом, описанным выше. Используя полученное усредненное значение фазовой скорости \bar{V}_p и направление нормали к фронту \vec{n} , по формуле (2) вычисляются соответствующие значения компонент вектора групповой скорости $\vec{v}_p(\vec{n}) = (v_x, v_y, v_z)$. За промежуток времени dt центральная точка \vec{x}_p переместится в точку $\vec{x}_p + d\vec{x}_p$, $d\vec{x}_p = (dx_p, dy_p, dz_p)$ вдоль направления вектора групповой скорости: $dx_p = dt \cdot v_x$, $dy_p = dt \cdot v_y$, $dz_p = dt \cdot v_z$. Таким образом находится положение следующей точки на луче. Далее нам необходимо вычислить ориентацию волнового фронта в этой точке.

Второй этап (2). Контрольные точки, которые используются для определения нормали к фронту в следующий момент времени, выбираются следующим образом. Рассмотрим окружность, лежащую в плоскости волнового фронта. Пусть радиус окружности тоже зависит от локальной длины волны, $R = \lambda \cdot l$, где параметр l по смыслу аналогичен параметру θ_{max} , который используется для определения апертуры сглаживания. На этой окружности мы выбираем некоторое количество точек с равномерным шагом по углу. Для каждой контрольной точки, расположенной на окружности с центром на луче, вычисляется вектор групповой скорости $\vec{v}_j(\vec{x}_j, \vec{n}) = (v_x^j, v_y^j, v_z^j)$ с использованием соответствующей нормали к волновому фронту \vec{n} , (одинакова для всех контрольных точек). За промежуток времени dt каждая из контрольных точек пройдет разное расстояние в силу того, что групповые скорости вычислялись в некотором объеме неоднородной модели, т.е. точкам могут соответствовать разные групповые скорости: $dx_j = dt \cdot v_x^j$, $dy_j = dt \cdot v_y^j$, $dz_j = dt \cdot v_z^j$. В новом положении контрольные точки $\vec{x}_j + d\vec{x}_j$ в общем случае уже необязательно будут лежать в одной плоскости. Чтобы определить текущее положение локально плоского волнового фронта, мы численно определяем такую плоскость, которая наиболее близка в среднеквадратичном смысле одновременно ко всему множеству точек $\vec{x}_j + d\vec{x}_j$. Таким образом, возникает классическая задача линейной регрессии. В результате ее численного решения определяется новый вектор нормали к фронту, \vec{n}_{new} . Мы приписываем этот вектор к новому положению центральной точки $\vec{x}_p + d\vec{x}_p$ и процедура повторяется снова. Так шаг за шагом происходит движение вдоль луча. Таким образом, при реализации описанной схемы происходит движение локально плоского фрагмента волнового фронта. В каждый момент времени на

его ориентацию влияет распределение физических параметров модели в некоторой окрестности луча.

Вычисление функций Грина в лучевом приближении

Приведем выражения, которые мы используем для моделирования волновых полей квазипродольных волн в лучевом приближении. Функция Грина для qP волны для источника типа точки расширения в лучевом приближении определяется как:

$$G_i(R, S) = \frac{g_i(R) \langle \vec{g}(S), \vec{n}(S) \rangle}{4\pi \sqrt{\rho(S)\rho(R)V(S)V(R)} J(S, R)} \exp \{i\omega\tau(S, R)\}, \quad (4)$$

где $\vec{g}(S)$ – вектор поляризации в источнике; $g_i(R)$ – компоненты вектора поляризации в приемнике; символом $\langle \dots \rangle$ обозначено скалярное произведение; $\tau(S, R)$ – время пробега из источника в текущую точку R; V – фазовая скорость; ρ – плотность.

$J(S, R)$ обозначает геометрическое расхождение вдоль луча. Общее определение геометрического расхождение дается как $J = \frac{dS}{d\Omega}$, где dS – элементарная площадка, ортогонально секущая лучевую трубку в точке R, $d\Omega$ – элементарный телесный угол, образуемый лучевой трубкой в источнике. Мы используем конечно разностную аппроксимацию геометрического расхождения и применяем теорию, описанную в [11] (выражение 3.10.33), адаптированную для анизотропного случая. Приближенное выражение для вектора поляризации qP волны приведено в [10] (формула 29).

Численный эксперимент

Для верификации процедуры расчета волновых полей qP волны с помощью лучей Ломакса мы выбрали вертикально неоднородную модель среды. На рис. 1 приведены 3D модель фазовых скоростей вдоль вертикальной оси симметрии, а также 1D профили параметров Томсена. Размер модели составляет $2 \times 2 \times 1.7$ км.

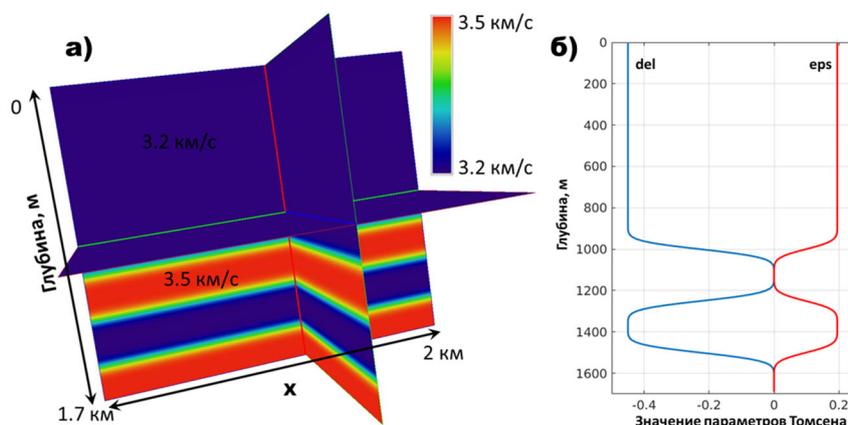


Рис. 1. а) Модель фазовых скоростей вдоль оси симметрии; б) параметры Томсена

Для сравнения с лучевым методом проводился расчет волновых полей в этой модели с помощью конечно-разностного метода с учетом коаксиальной симметрии модели. Для эксперимента была выбрана геометрия выносного ВСП. Предполагалось, что вертикальная скважина со 170 приемниками (шаг по глубине равен 10 м) расположена в центре модели. На различных удалениях от скважины располагались источники типа центра расширения. На рис.2 приведена сейсмограмма ВСП для источника с удалением 800 м (вертикальная компонента). На сейсмограмму наложены времена первых вступлений прямой qP волны, рассчитанные вдоль лучей Ломакса (частота лучей Ломакса выбрана равной 20 Гц, доминирующая частота при моделировании равна 30 Гц). Можно видеть хорошее соответствие лучевых времен и времен максимальной фазы на сейсмограмме.

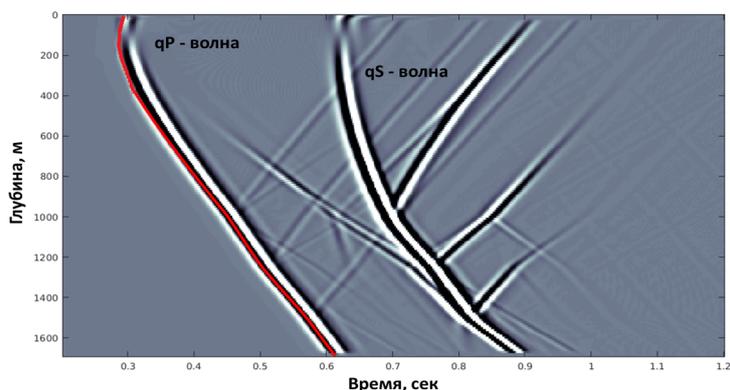


Рис. 2. Сейсмограмма ВСП, полученная конечно-разностным методом (z – компонента). Времена, полученные вдоль лучей Ломакса с частотой 20 Гц обозначены красным

На рис.3 приводятся таблица времен первых вступлений и соответствующее волновое поле qP волны на частоте 20 Гц (вертикальная компонента, реальная часть). На рис.4 приводится сравнение волновых полей qP волны в приемниках. Сравниваются волновое поле, полученное конечными разностями с волновым полем, полученным в лучевом приближении. Отметим, что для этого сравнения на сейсмограммах ВСП удалялись все вступления, которые не относятся к qP-волне.

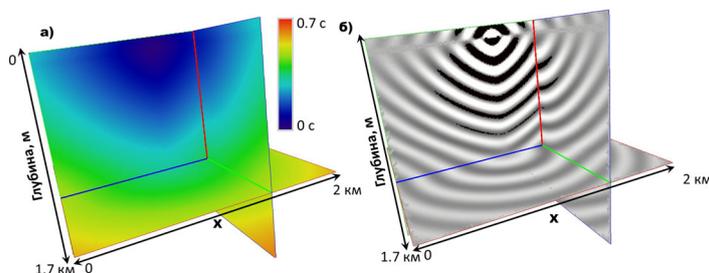


Рис. 3. а) Таблица времен первых вступлений qP - волны; б) реальная часть соответствующего волнового поля qP волны на частоте 20 Гц (вертикальная компонента)

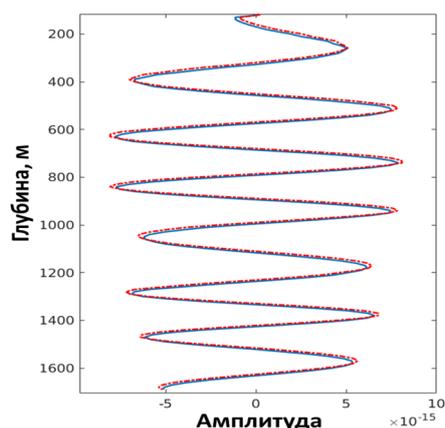


Рис. 4. Сравнение волновых полей на частоте 20 Гц в приемниках, полученных конечно-разностным методом (синим) и с помощью лучей Ломакса (красным)

Заключение

В настоящей работе описан алгоритм построения квазипродольных частотно-зависимых лучей (лучи Ломакса) в трехмерных трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии. Свойства лучей Ломакса определяются распределением параметров модели в некотором объеме среды, сосредоточенным вокруг луча. Ширина зоны чувствительности зависит от длины волны в каждой точке. Длина волны определяется с помощью априорно задаваемого параметра, имеющего размерность частоты, который мы называем “частота луча”. Для повышения численной эффективности используются приближенные выражения для фазовых и групповых скоростей для слабо-анизотропной среды. Проведенные численные эксперименты демонстрируют, что лучи Ломакса могут успешно применяться в трехмерных трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии для расчета времен, лучевых траекторий и волновых полей в лучевом приближении.

Благодарности

Протасов М. И. разработал алгоритм построения квазипродольных частотно-зависимых лучей в рамках проекта ФНИ FWZZ-2022-0022. Неклюдов Д. А. реализовал алгоритм построения квазипродольных частотно-зависимых лучей и численно его исследовал на ряде реалистичных моделей на предмет его применимости для задач сейсмологии при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-20002). Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (scc.spbstu.ru)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М. : Наука, 1980. – 282 с.
2. Ben-Menahem A., Beydoun W. B. Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media – I. General theory // Geophysical Journal International. – 1985. – Vol. 82. – P. 207-234.

3. Lomax A. The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures // *Geophysical Journal International*. – 1994. – Vol. 117. – P. 313-334.
4. Vasco D. W., Peterson J. E., Majer E.L. Beyond ray tomography: Wavepaths and Fresnel volumes // *Geophysics*. – 1995. – Vol. 60. – P.454-469.
5. Bube K. P., Washbourne J. K.: Wave tracing: ray tracing for the propagation of band-limited signals: Part 1 – Theory // *Geophysics*. – 2008. – Vol. 73. – P.VE377-VE384.
6. Protasov M., Gadylshin K. Computational method for exact frequency-dependent rays on the basis of the solution of the Helmholtz equation // *Geophysical Journal International*. – 2017. – Vol. 210. – № 1. – P. 525-533.
7. Vasco D. W., Nihei K. Broad-band trajectory mechanics // *Geophysical Journal International*. – 2019. – Vol. 216. – № 2. – P. 745-759.
8. Неклюдов Д. А., Протасов М. И. Трёхмерные лучи Ломакса и их использование для моделирования акустических волновых полей в сложных средах // *Геофизические технологии*. – 2023. – № 2. – С. 56-71.
9. Thomsen L. Weak elastic anisotropy // *Geophysics*. – 1986. – Vol. 51. – № 10. – P. 1954-1966.
10. Dehghan K., Farra V., Nicolétis L. Approximate ray tracing for qP-waves in inhomogeneous layered media with weak structural anisotropy // *Geophysics*. – 2007. – Vol. 72. – № 5. – P. SM47-SM60.
11. Cerveny V. *Seismic Ray Theory*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2001. – Vol. 110. – P. 53.

© Д. А. Неклюдов, М. И. Протасов, 2024