

*А. А. Манаев<sup>1\*</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup>*

## **Спектральный предобуславливатель для численного решения уравнения Пуассона**

<sup>1</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт математики СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация  
\* e-mail: manaeff.leha@gmail.com

**Аннотация.** В работе представлен численный алгоритм решения уравнения Пуассона для двумерной неоднородной среды, основанный на конечно-разностной аппроксимации с последующим решением СЛАУ методом сопряженных градиентов с предобуславливанием. В качестве предобуславливателя используется оператор, соответствующий уравнению Пуассона в двумерной слоистой среде, полученной путем осреднения параметров по одному из направлений. Для обращения предобуславливающего оператора используется метод, основанный на спектральном разложении одномерных операторов.

**Ключевые слова:** численные методы, предобуславливатели

*А. А. Манаев<sup>1\*</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup>*

## **Spectral preconditioner for the numerical solution of the Poisson equation**

<sup>1</sup> Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation  
\* e-mail: manaeff.leha@gmail.com

**Abstract.** The paper presents a numerical algorithm for solving the Poisson equation for a two-dimensional inhomogeneous medium based on finite-difference approximation followed by solving a system of linear algebraic equations by the method of conjugate gradients with preconditioning. A preconditioning operator corresponding to the Poisson equation is used in a two-dimensional layered medium obtained by averaging the parameters in one of the directions. To reverse the preconditioning operator, a direct method based on the spectral decomposition of one-dimensional operators is used.

**Keywords:** numerical methods, preconditioners

### ***Введение***

Вычислительная физика горных пород – современное направление петрофизических исследований. Численная оценка эффективных физических свойств пористых материалов является одним из основных разделов вычислительной физики горных пород. В частности, широкий интерес представляют оценки удельного электрического сопротивления, абсолютной проницаемости, относительной проницаемости и упругих параметров.

Для получения численной оценки удельного сопротивления или электропроводности образца породы необходимо вычислить электрический потенциал при заданном изменении напряжения на противоположных сторонах образца, после чего электропроводность может быть оценена как отношение электрического тока к изменению напряжения. Наиболее сложной частью получения оценки является вычисление электрического потенциала, так как для его нахождения необходимо решить уравнение Пуассона в сильно неоднородной среде. В данном случае, под сильно неоднородной подразумевается среда, в которой в соседних узлах расчетной сетки проводимость может отличаться на несколько порядков, при этом размер неоднородностей составляет несколько точек сетки.

Среди возможных подходов к вычислению электрического потенциала следует выделить методы крыловского типа, применяемые для решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной из аппроксимации дифференциального уравнения конечными разностями. Однако у такой системы будет большое число обусловленности из-за того, что в сильно неоднородной среде электропроводность может варьироваться на несколько порядков. Кроме того, число обусловленности будет расти с увеличением размера СЛАУ. В связи с этим для увеличения скорости сходимости итерационных методов будет целесообразно использовать подходящие предобуславливатели. Для предобуславливания дискретизированного уравнения Пуассона обычно используется неполная LU-факторизация [2], включающая в себя малоранговые аппроксимации [5] и многосеточные методы (multi-grid) [4]. Первые требуют хранения матрицы и сомножителей ее факторизации, а вторые требуют решения ряда задач на серии вложенных сеток и хранения их решений. Однако, если рассматриваются сильно неоднородные модели геоматериалов, укрупнение масштаба, т.е. размера сетки, приводит к изменению топологии и геометрии порового пространства, которое является основной проводящей частью модели. Таким образом, решение задачи на более грубой сетке не будет ближе к истинному решению, чем для однородных сред. В то же время уравнение Пуассона с постоянной проводимостью может быть эффективно решено спектральным методом [1, 7].

В работе в роли предобуславливателя предлагается использовать оператор, соответствующий уравнению Пуассона в слоистой среде, а для его обращения используется прямой метод решения СЛАУ, основанный на спектральном разложении одномерных операторов. Проводимость слоистой среды рассчитываются путем осреднения проводимости исходной неоднородной среды по одному из направлений.

### ***Уравнение Пуассона для неоднородной среды***

Рассматривается уравнение Пуассона, заданное в области  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ :

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y) \nabla \phi(x, y)) = 0,$$

где  $\sigma(x, y)$  – электропроводность,  $\phi(x, y)$  – электрический потенциал.

На границах попарно заданы условия Дирихле и Неймана соответственно:

$$\begin{aligned}\phi(x, y)|_{y=c} &= \phi_c, & \phi(x, y)|_{y=d} &= \phi_d, \\ \nabla\phi \cdot \vec{n}|_{x=a} &= 0, & \nabla\phi \cdot \vec{n}|_{x=b} &= 0.\end{aligned}$$

В работе для аппроксимации уравнения Пуассона в неоднородной среде используется консервативная конечно-разностная схема [1]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_x}(\tilde{\sigma}_{i+1/2,j}D_x(\phi)_{i+1/2,j} - \tilde{\sigma}_{i-1/2,j}D_x(\phi)_{i-1/2,j}) + \\ + \frac{1}{h_y}(\tilde{\sigma}_{i,j+1/2}D_y(\phi)_{i,j+1/2} - \tilde{\sigma}_{i,j-1/2}D_y(\phi)_{i,j-1/2}) = 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}D_x(\phi)_{i+1/2,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h_x}, & D_y(\phi)_{i,j+1/2} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h_y}, \\ \tilde{\sigma}_{i+1/2,j} &= \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i+1,j}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}, & \tilde{\sigma}_{i,j+1/2} &= \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i,j+1}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}.\end{aligned}$$

Полученная из аппроксимации СЛАУ может быть приведена к эквивалентной СЛАУ с самосопряженной и положительно-определенной матрицей:

$$\begin{aligned}A = \\ = \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} C_{1/2}^y + C_{3/2}^y & -C_{3/2}^y & & \\ -C_{3/2}^y & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -C_{N_y-5/2}^y \\ & & -C_{N_y-5/2}^y & C_{N_y-5/2}^y + C_{N_y-3/2}^y \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} C_1^x & & \\ & \ddots & \\ & & C_{N_y-2}^x \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где  $C_j^y$  и  $C_i^x$  – диагональные и трехдиагональные матрицы соответственно.

## *Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием*

В работе для решения СЛАУ применяется метод сопряженных градиентов, так как самосопряженность и положительная определенность матрицы гарантируют теоретическую сходимость этого итерационного метода за конечное число шагов [3]. Однако большое число обусловленности может привести к медленной сходимости метода. Из теории разностных схем следует, что число обусловленности матрицы размера  $N \times N$ , соответствующей оператору Лапласа, растет как  $N^2$  [6]. Наличие больших контрастов проводимости в расчетной области также приводит к росту числа обусловленности. Поэтому является целесообразным использование предобуславливателей.

В работе используются предобуславливатели, соответствующие уравнению Пуассона для слоистых сред, построенных путем осреднения (арифметическим или гармоническим) проводимости по одному из направлений. Решение предобуславливающих систем основано на спектральном разложении одномерных операторов и последующем решении серии одномерных задач прогонкой.

### *Верификация алгоритма*

Для верификации алгоритма были проведены расчеты для набора моделей с простой внутренней геометрией, одна из этих моделей представлена на рис. 1. Проводимость “желтых” каналов составляла 10 См, проводимости “черных” каналов – 1 См. Разность потенциалов равнялась единице. Размер образцов составлял  $5 \times 2^n$  узлов, где  $n = 1, 2, \dots, 7$ .

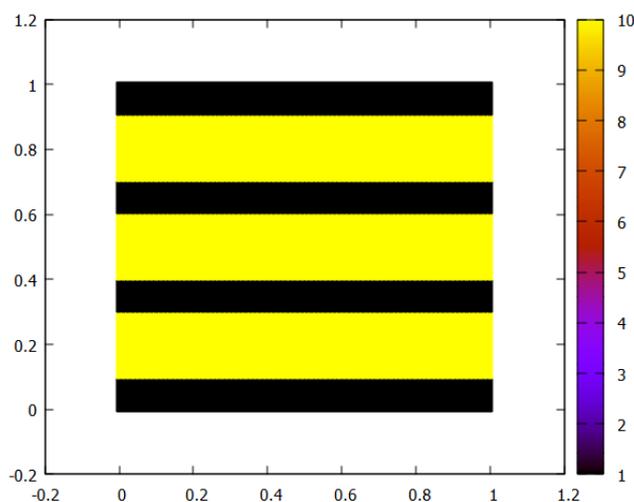


Рис. 1. Слоистая модель с чередующимися проводящими и непроводящими слоями, перпендикулярными направлению основного изменения потенциала

Эта модель соответствует последовательному соединению резисторов, поэтому проводимость может быть рассчитана по формуле:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{h_1}{H} \frac{1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{H} \frac{1}{\sigma_2},$$

где  $H$  – длина образца;  $h_1, h_2$  – ширина проводящих и непроводящих каналов;  $\sigma_1, \sigma_2$  – электропроводность в проводящих и непроводящих каналах соответственно.

Результаты расчетов представлены в табл. 1. Численные оценки проводимости сходятся к теоретическим с первым порядком.

*Таблица 1*

Результат оценки проводимости слоистой модели (рис. 1)  
на последовательности измельченных сеток

Размер модели	Теоретическая оценка проводимости	Численная оценка проводимости	Ошибка
10	2.17391	2.77778	0.603865
20	2.17391	2.43902	0.265111
40	2.17391	2.29885	0.124938
80	2.17391	2.23464	0.0607238
160	2.17391	2.20386	0.0299437
320	2.17391	2.18878	0.0148694
640	2.17391	2.18132	0.00740938

### ***Численный эксперимент***

Была проведена серия экспериментов, в которой для моделей с одинаковой внутренней геометрией и разным количеством узлов сравнивалось количество итераций. На рис. 2а и 3а представлены модели, на которых были проведены данные эксперименты. При расчетах был использован спектральный предобуславливатель, основанный на решении уравнения Пуассона в однородной среде.

На рис. 2б и 3б представлены графики зависимостей числа итераций от контраста проводимости на последовательности измельченных сеток ( $N = 100^2, 200^2, 400^2, 800^2$  соответственно).

Заметим, что число итераций при использовании предобуславливателя зависит от контраста электропроводности, но практически не зависит от количества узлов в расчетной области.

Также была проведена серия экспериментов, в которой сравнивалась эффективность предобуславливателей, основанных на решении уравнения Пуассона для разного рода сред: однородной, слоистой по направлению основного изменения потенциала, слоистой перпендикулярно направлению основного измене-

ния потенциала. На рис. 4а и 5а представлены модели размером  $100^2$  узлов, на которых были проведены данные эксперименты.

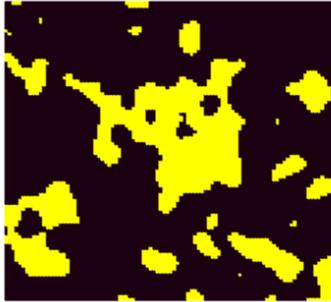


Рис. 2а. Двухфазная среда с пористостью 30%

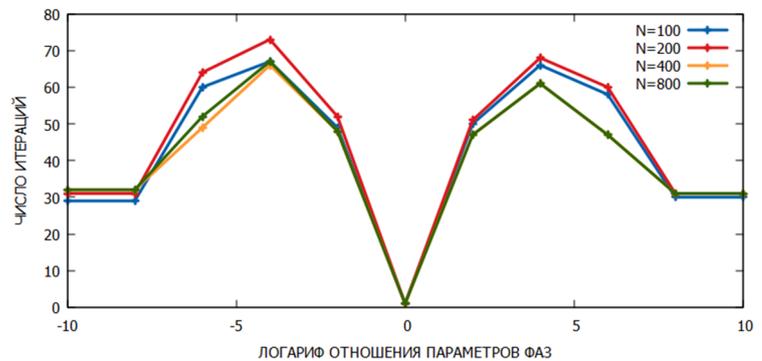


Рис. 2б. Зависимость числа итераций от величины контраста проводимости для моделей с одинаковой внутренней геометрией и разным количеством узлов

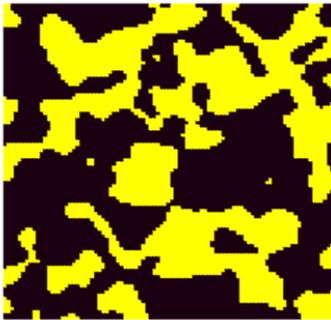


Рис. 3а. Двухфазная среда с пористостью 45%

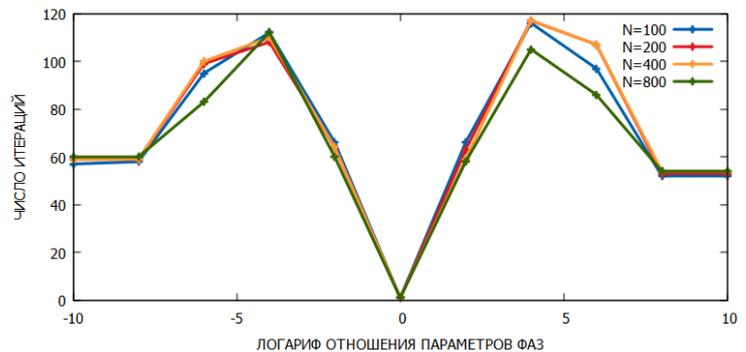


Рис. 3б. Зависимость числа итераций от величины контраста проводимости для моделей с одинаковой внутренней геометрией и разным количеством узлов

На рис. 4 и 5 представлены слоистые среды, которые были построены арифметическим осреднением электропроводности по направлению основного тока (в) и перпендикулярно этому направлению (б).

На рис. 6 и 7 представлены графики зависимостей числа итераций от контраста проводимости при использовании разных предобуславливателей. Расчеты проводились до достижения значения относительной невязки равной  $10^{-14}$ .

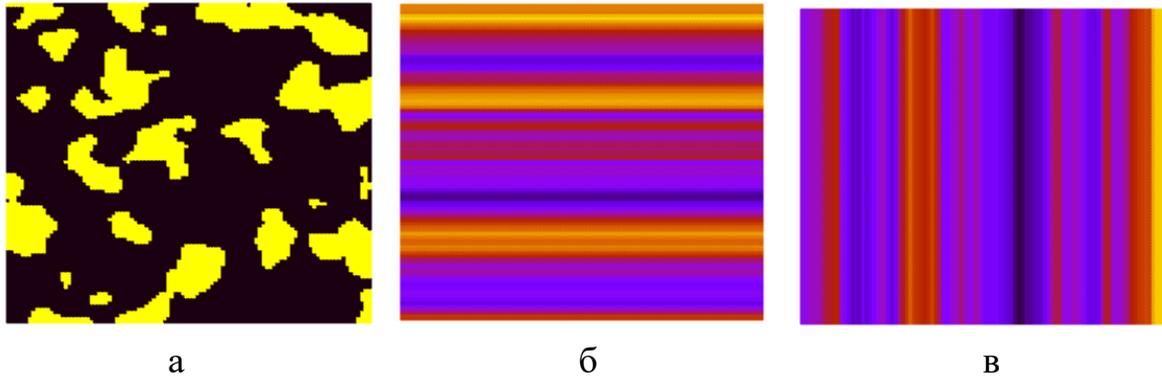


Рис. 4. Двухфазная среда с пористостью 30% и слоистые среды, построенные путем осреднения проводимости по одному из направлений

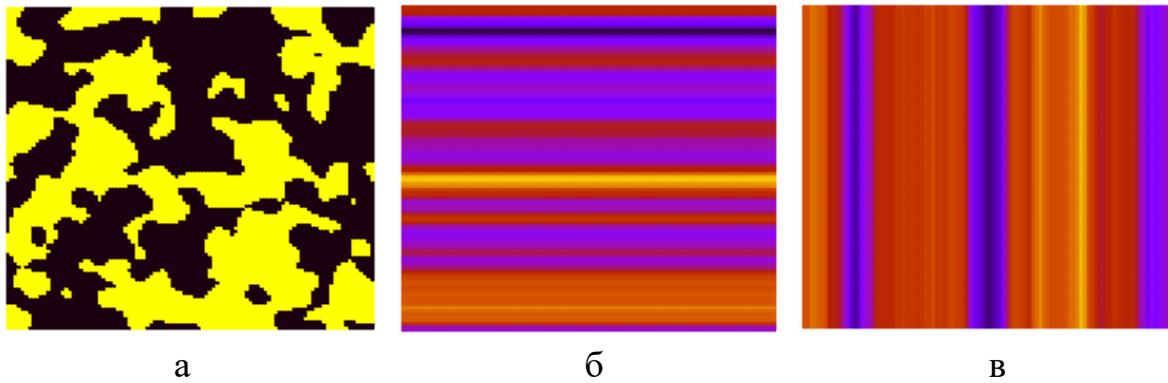


Рис. 5. Двухфазная среда с пористостью 45% и слоистые среды, построенные путем осреднения проводимости по одному из направлений

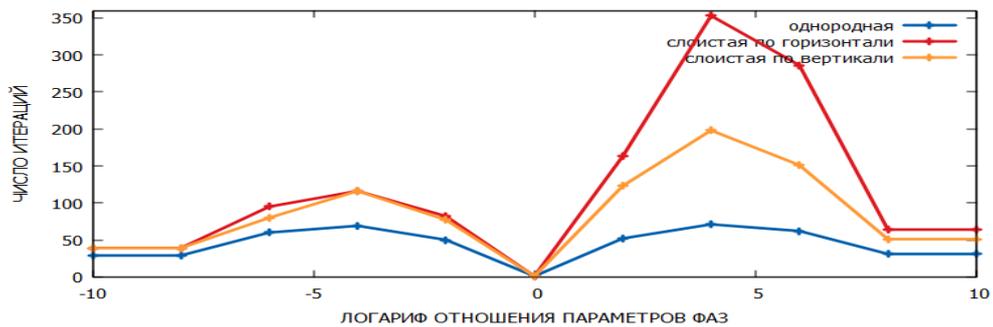


Рис. 6. Зависимость числа итераций от величины контраста проводимости при использовании разных предобуславливателей для расчета модели (рис. 4а)

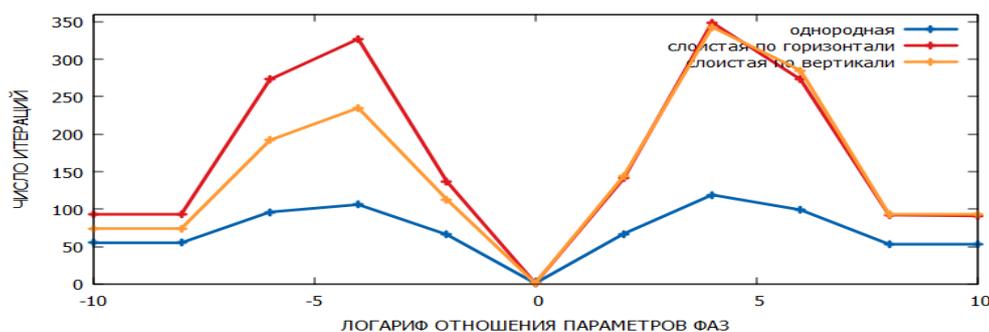


Рис. 7. Зависимость числа итераций от величины контраста проводимости при использовании разных предобуславливателей для расчета модели (рис. 5а)

Заметим, что при расчете эффективнее использовать предобуславливатель, основанный на решении уравнения Пуассона для однородной среды.

### *Заключение*

В работе представлены предобуславливатели, основанные на решении уравнения Пуассона для различных сред: однородных и слоистых. На примере численных расчетов некоторых моделей было показано, что количество итераций зависит от величины контраста электропроводности и практически не зависит от количества узлов в сетке. Также было показано, что эффективнее использовать спектральный предобуславливатель, основанный на решении уравнения Пуассона для однородной среды.

### *Благодарности*

Работы выполнены при финансовой поддержке РФФ грант 21-71-20003.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. 3D numerical simulation of elastic waves with a frequency–domain iterative solver // *Geophysics*. – 2018. – Vol. 83. – № 6. – P. T333-T344.
2. Haber E., Ascher U. M., Aruliah D. A., Oldenburg D. W. Fast Simulation of 3D Electromagnetic Problems Using Potentials // *Journal of Computational Physics*. – 2000. – Vol. 163. – № 1. – P. 150-171.
3. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. – Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2003.
4. Stuben K. A review of algebraic multigrid // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2001. – Vol. 128. – № 1-2. – P. 281-309.
5. Воронин К. В., Соловьев С. А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобусловливателя // *Вычислительные методы и программирование*. – 2015. – Т. 16. – С. 268-280.
6. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. – М. : Наука, 1983.
7. Хачкова Т. С., Лисица В. В., Решетова Г. В., Чеверда В. А. Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических со–процессоров // *Вычислительные методы и программирование*. – 2020. – Т. 21. – № 3. – С. 306-318.