

А. Ю. Кутищева^{1,2}, Д. В. Добролюбова^{1,2}*

Численная оценка влияния структуры образца на его эффективные упругие свойства

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

² Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск,
Российская Федерация

* e-mail: KutischevaAY@ipgg.sbras.ru

Аннотация. Одним из этапов изучения грунтов и горных пород является численное моделирование физических процессов в них протекающих, поскольку позволяет получить оценки эффективных свойств сред и материалов без их разрушения, что является проблемой при постановке физических экспериментов. Однако необходимо выработать критерии корректности построения цифровых образцов для численного моделирования. Одним из вариантов калибровки синтетических моделей является сравнение с цифровыми образцами, восстановленными по данным компьютерной томографии реального фрагмента керна. В рамках данной работы выполнялось сравнение синтетических образцов, сгенерированных по нескольким различным стратегиям, с цифровым образцом, полученным из керна, с точки зрения его эффективного тензора упругости. Получено, что для полностью твердой среды с невыраженной анизотропией (песчаник со льдом) наилучшей стратегией является представлять образец в виде равномерно-распределенных шариков, составляющих песчаную матрицу, а лед при этом заполняет все пространство между шариками. При этом при увеличении процентного содержания льда компоненты эффективного тензора упругости линейно уменьшаются.

Ключевые слова: гомогенизация, эффективный тензор упругости, гетерогенные среды

A. Yu. Kutishcheva^{1,2}, D. V. Dobrolyubova^{1,2}*

Numerical Estimation of the Influence of the Sample Structure on its Effective Elastic Properties

¹ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics of SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation

²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

* e-mail: KutischevaAY@ipgg.sbras.ru

Abstract. One of the stages of studying ground and rocks is numerical modeling of physical processes occurring in them, because it allows us to obtain estimates of effective properties of media and materials without destroying them, which is a problem when setting up physical experiments. However, it is necessary to develop criteria of correctness of construction of numerical samples for simulations. One of the options for calibration of synthetic models is comparison with numerical samples reconstructed from computer tomography data of a real core fragment. In the framework of this work, synthetic samples generated by several different strategies were compared with the numerical sample obtained from the core in terms of its effective elasticity tensor. It is obtained that for a completely solid medium with unexpressed anisotropy (sandstone with ice) the best strategy is to represent the sample as uniformly distributed balls that make up the sand matrix, while ice fills the entire space between the balls. The components of the effective elasticity tensor decrease linearly with increasing ice percentage.

Keywords: homogenization, effective elasticity tensor, heterogeneous media

Введение

При проектировании жилых и промышленных сооружений в арктической зоне одним из этапов является изучение многолетнемерзлых пород с точки зрения их физических характеристик, в том числе упругих свойств. Чаще всего для этого применяются различные натурные и физические лабораторные эксперименты, однако также могут применяться различные подходы, основанные на численном моделировании физических полей и последующей гомогенизации.

В работах можно выделить две основные стратегии изучения свойств горных пород с использованием методов численного моделирования. Наиболее распространённой является построение идеализированных геометрических моделей, то есть среда представляется в виде набора некоторых геометрических примитивов (обычно шариков разного радиуса) [1], [2], [3]. Такой подход позволяет генерировать большое количество цифровых образцов с минимальными затратами, однако требуются дополнительные исследования о возможности переноса полученных оценок на реальные среды.

С этой точки зрения наиболее достоверные результаты дают вычислительные эксперименты, проводимые на цифровых аналогах реальных образцов горных пород, построенных на основе данных об их внутренней структуре, полученных с помощью неразрушающих методов. Одним из наиболее широко применяемых методов является метод компьютерной томографии (КТ) [4]. Данные о внутренней структуре образцов горных пород представляются в виде цифровых изображений, каждый пиксель (воксель) которых несет информацию о материале, составляющем образец. Такую модель среды можно использовать для построения моделей порового пространства образца (PNM) [5, 6], как сеточную модель, где каждый воксель рассматривается в качестве сеточного элемента [7, 8, 9], либо для построения сеточных моделей, корректно учитывающих границы раздела, но при этом менее подробных, чем воксельная модель [10].

Следует отметить, что использование моделей горных пород, отражающих реальное геометрическое строение, существенно более ресурсозатратно, чем моделирование в идеализированных приближениях.

В рамках данной работы рассматривается влияние структуры твердой пористой породы, содержащей лёд, на напряженно-деформированное состояние и на эффективный тензор упругости. При этом сравниваются результаты, полученные для геометрически-идеализированных образцов и для образцов горных пород, восстановленных по данным компьютерной томографии.

Методы и материалы

Многолетнемерзлые породы обычно обладают достаточно сложной структурой, в которой можно выделить два основных компонента: горная порода (матрица с модулем Юнга 50 ГПа и коэффициентом Пуассона 0.2) и лёд (включения с модулем Юнга 0.3 ГПа и коэффициентом Пуассона 0.35). В данной работе рас-

смотрим три варианта таких сред: образцы со льдом, сосредоточенным в геометрически-правильных порах-сферах с гладкой границей (рис. 1.а); синтетические образца со структурой, приближенной к реальной среде (лед в пространствах между сферическими частицами песчаника) (рис. 2.б); образец горной породы с нерегулярной пористостью (рис. 1.в), восстановленный по данным компьютерной томографии, выполненной в Imperial College London [11]. Разрешение изображений 1024×1024 , шаг сканирования 2.654 мкм. Заявленная пористость 13.2%, пористость на основе сеточной модели 12.1%.

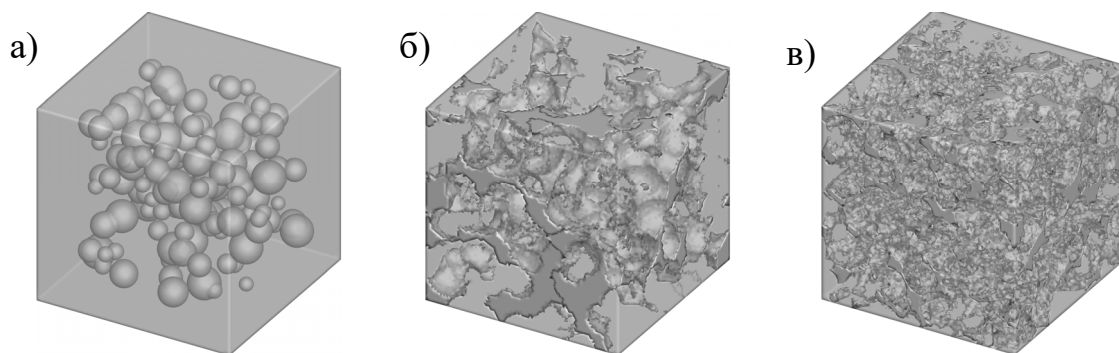


Рис. 1. Примеры образцов для вычислительных экспериментов: а – синтетический образец (лед в порах-шариках); б – синтетический образец (лед в пространствах между шариками матрицы); в – образец, построенный по данным компьютерной томографии

Для оценки влияния структуры образца на его эффективные упругие свойства используется подход к вычислению эффективного тензора упругости, основанный на требовании равенства потенциальной энергии деформации исходного гетерогенного твердого тела и его гомогенизированного аналога. В таком случае каждая компонента эффективного тензора упругости $\mathbf{D}_{eff} = \{d_{ijkp}^{eff}\}$, $i, j, k, p \in \{x, y, z\}$ может быть вычислена из соотношения [12]:

$$d_{ijkp}^{eff} = \frac{1}{4\beta^2 |\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ij)}(\mathbf{x}) : \mathbf{D}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(kp)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ij)} = \nabla_s \mathbf{u}$ – тензор деформации, соответствующий деформации гетерогенного образца Ω : при $i = j$ растяжение по оси $i \in \{x, y, z\}$, при $i \neq j$ сдвиг по осям $i \in \{x, y, z\}$ и $j \in \{x, y, z\}$; $|\Omega|$ – объем образца; $\beta \equiv const$ – регуляризирующий параметр, зависящий от размеров образца и обеспечивающий малые деформации.

Таким образом для получения эффективного тензора упругости необходимо решить шесть эллиптических уравнений вида

$$-\nabla \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \Omega = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

с краевыми условиями, обеспечивающими требуемые одноосные растяжения (например, растяжение по оси Ox $\mathbf{u}^{xx}(\mathbf{x}) = (\beta(x - 0.5a), 0, 0)^T$, где a – длина ребра образца) и сдвиги (например, сдвиг в плоскости XOY $\mathbf{u}^{xy}(\mathbf{x}) = (\beta(y - 0.5a), 0, 0)^T$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^i(\mathbf{x}), \quad (3)$$

и условиями неразрывности на границах раздела сред

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{(\Omega_n \cap \Omega_m)^+} = \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{(\Omega_n \cap \Omega_m)^-}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^+|_{(\Omega_n \cap \Omega_m)^+} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^-|_{(\Omega_n \cap \Omega_m)^-}, \quad (4)$$

где Ω – трехмерная область моделирования, состоящая из нескольких материалов; $\partial\Omega$ – внешняя граница области моделирования, состоящая из нескольких материалов; $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ – тензор напряжений (Па); $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ – тензор Гука (Па); $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор перемещений (м).

Для решения задачи (2) – (4) используется гетерогенный многомасштабный метод конечных элементов [13], поскольку он является оптимальным для гетерогенных областей с мелкомасштабными неоднородностями. Для решения получаемых систем линейных алгебраических уравнений применяется метод сопряженных градиентов с SSOR-предобусловливателем.

Построение иерархических конечноэлементных сеток для идеализированных образцов (таких как на рис. 1.а) выполняется в открытом программном комплексе Salome. Для получения дискретизаций образца горной породы, представленного стеком послойных изображений, используется гибридный алгоритм на основе метода шагающих тетраэдров [14].

Результаты

Для оценки влияния внутренней структуры образца (песчаник со льдом) на соответствующий эффективный тензор упругости сгенерировано несколько синтетических образцов с различным содержанием льда двумя способами: лед сосредоточен в порах-шариках (рис. 1.а, 2.а, 3.а) и лед распределен между шариками, составляющими матрицу образца из песчаника (рис. 1.б, 2.б, 3.б). Используемые генераторы псевдо-случайных сред позволили построить образцы близкие к изотропным: коэффициент анизотропии почти равен 1 за исключением нескольких, где коэффициент анизотропии приблизительно равен 0.98 (рис. 4, 5). Поэтому в качестве верификации можно сравнить вычисляемые эффективные

характеристики с аналитическими оценками по методам Фойгта и Рейсса [15], которые позволяют вычислить верхнюю и нижнюю границы для эффективных модулей упругости. Для рассматриваемых сред (песчаник и лед), при концентрации льда 12.1% верхняя и нижняя оценки эффективного модуля упругости составляют 44 ГПа и 2.37 ГПа соответственно. Также можно с некоторыми допущениями использовать метод Дьюи [15], согласно которому эффективный модуль Юнга равен 38.1 ГПа для рассматриваемой среды. В допущении об изотропности среды из вычисленных эффективных тензоров (1) можно также вычислить эффективные модули Юнга: 38.4 ГПа для образца, построенного по кернам компьютерной томографии (рис. 1.в, 2.в, 3.в), 39.6 ГПа для синтетического образца со льдом, сосредоточенным в порах-шариках (рис. 1.а, 2.а, 3.а), 38.6 ГПа для синтетического образца со льдом между шариками матрицы (рис. 1.б, 2.б, 3.б). Таким образом для всех образцов при концентрации льда 12.1% вычисляемые эффективные тензоры упругости находятся в пределах априорных аналитических оценок.

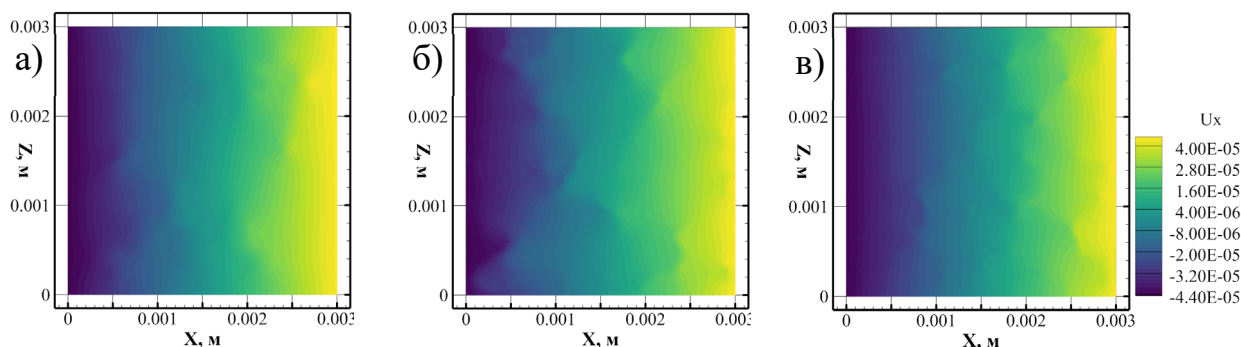


Рис. 2. Распределение x-компоненты вектора перемещений в сечении, проходящем через центр образца: а – синтетический образец (лед в порах-шариках); б – синтетический образец (лед в пространствах между шариками матрицы); в – образец, построенный по данным компьютерной томографии

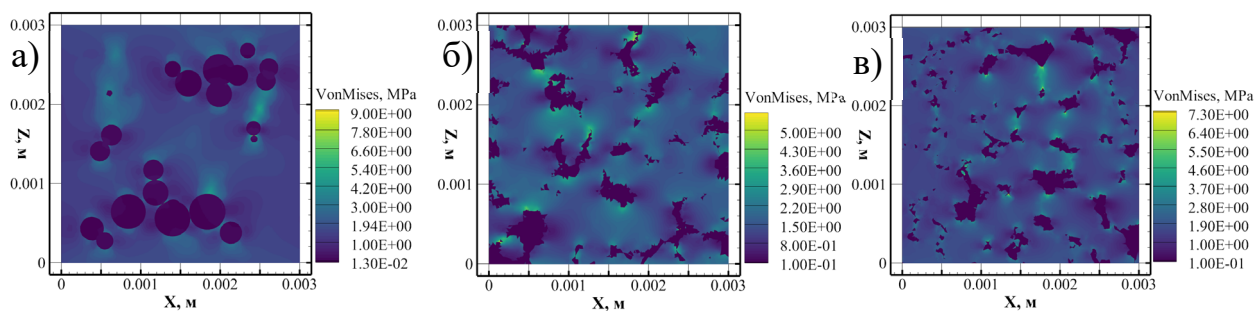


Рис. 3. Интенсивность напряжений фон Мизеса в сечении, проходящем через центр образца: а – синтетический образец (лед в порах-шариках); б – синтетический образец (лед в пространствах между шариками матрицы); в – образец, построенный по данным компьютерной томографии

Оба варианта синтетических сред с точки зрения эффективного тензора упругости являются достаточно близкими при малых концентрациях льда: при концентрации 5% относительное расхождение D_{xxxx} -компоненты тензора составляет 0.5%. При возрастании концентрации льда линейно растет расхождение, например, при концентрации 17% относительное расхождение D_{xxxx} -компоненты тензора составляет 7.92% (рис.4.а).

Для образца, восстановленного по данным КТ (рис. 1.в, 2.в, 3.в) построено два сеточных разбиения грубое (содержание льда 10.9%) и более мелкое (содержание льда 12.1%). Второй вариант сетки ближе по пористости к заявленной для образца [11]. Также можно видеть (рис. 4, 5), что минимальное расхождение (около 0.3%) компонент эффективного тензора упругости достигается при мелком разбиении по сравнению с синтетическими образцами, у которых лед между шариками (рис. 1.б).

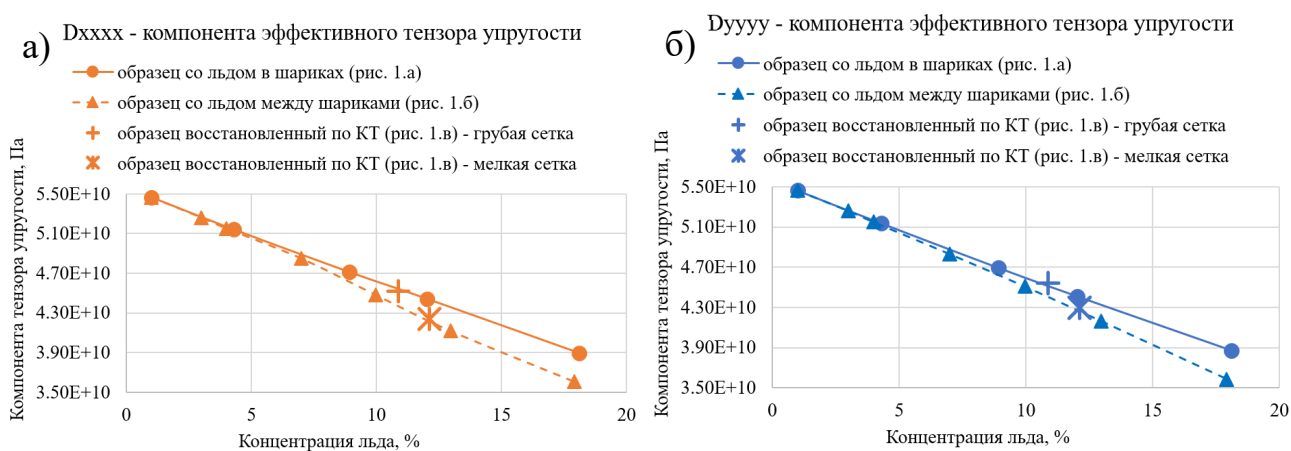


Рис. 4. D_{xxxx} (а) и D_{uuuu} (б) компоненты эффективного тензора упругости для различного процентного содержания льда в образцах

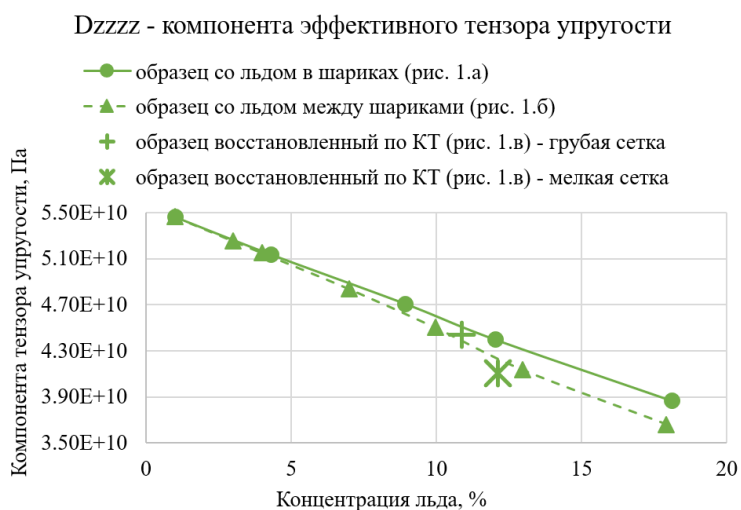


Рис. 5. D_{zzzz} компонента эффективного тензора упругости для различного процентного содержания льда в образцах

Заключение

В рамках данной работы выполнены вычислительные эксперименты по получению эффективного тензора упругости для ряда синтетических образцов и для образца, восстановленного по набору сканов компьютерной томографии фрагмента керна. Синтетические образцы генерировались по двум стратегиям. В первом случае лед сосредоточен в шариках-включениях, остальная часть образца – матрица-песчаник. Во втором случае матрица составлена из набора шариков, а лед распределен в пространстве между шариками. Получено, что для полностью твердой среды с невыраженной анизотропией (песчаник со льдом) наилучшим является именно второй подход. Причем в этом случае расхождение компонент эффективного тензора упругости синтетического образца с восстановленным образцом по керну составило менее 0.5%. Также отмечается линейное уменьшение компонент эффективного тензора упругости при увеличении процентного содержания льда.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (номер проекта 22-71-10037).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zheng Y., Chu L., Dui G., Zhu X., Numerical predictions for the effective properties of flexoelectric composites with spherical inclusion // *Acta Mechanica*. – 2022. – Vol. 233. – P. 2093-2106
2. Игнатова А. В., Кудрявцев О. А., Сапожников С. Б. Экспериментальное исследование и численное моделирование упругих характеристик и прочности пористой керамики // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2015. – № 4. – С. 131-137.
3. Левандовский А. Н., Мельников Б. Е., Шамкин А. А. Моделирование пористого материала методом конечных элементов // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. – 2017. – Т. 2 (53). – С. 61-77.
4. Zhu L., Zhang C., Zhang C. Challenges and prospects of digital core-reconstruction research // *Geofluids*. – 2019. – Vol. 2. – P. 1-29.
5. Zhang L., Jing W., Yang Y. The investigation of permeability calculation using digital core simulation technology // *Energies*. – 2019. – Vol. 12 (17). – P. 3273.
6. Blunt M. J. Flow in porous media – pore-network models and multiphase flow // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. – 2001. – Vol. 6 (3). – P. 197-207.
7. Yan W., Sun J., Zhang J. Studies of electrical properties of low-resistivity sandstones based on digital rock technology // *Journal of Geophysics and Engineering*. – 2018. – Vol. 15 (1). – P. 153-163.
8. Балашов В. А., Савенков Е. Б., Четверушкин Б. Н. Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений // *Математическое моделирование*. – 2019. – Т. 31 (7). – С. 21-44.
9. Хачкова Т. С., Лисица В. В., Сотников О. С., Исламов И. А., Ганиев Д. И. Новая методика численной оценки абсолютной проницаемости горных пород по их микротомографическим изображениям // *Геофизика*. – 2023. – Т.1. – С. 34-40.
10. Zhang Y., Hughes T.J.R., Bajaj C.L. An automatic 3D mesh generation method for domains with multiple materials // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 2010. – Vol. 199 (5). – P. 405–415/

11. Imperial College London, Pore Scale Modelling group: Micro-CT images and networks, retrieved from <http://www.imperial.ac.uk/engineering/departments/earthscience/research/research-groups/perm/research/pore-scalemodelling/micro-ct-images-and-networks> (2017)
12. Shurina E. P., Itkina N. B., Shtabel N. V., Shtanko E. I., Kutishcheva A. Yu., Markov S. I., Dobrolubova D. V. Determination of thermal, stiffness and electrical effective tensors in composite media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2022. – Vol. 409. – P. 114009.
13. Епов М. И., Шурина Е. Р., Кутисчева А. Ю. Computation of effective resistivity in materials with microinclusions by a heterogeneous multiscale finite element method // *Physical Mesomechanics*. – 2017. – Vol. 20(4). – P. 407-416.
14. Добролюбова Д. В., Штанько Е. И. Алгоритм построения иерархических сеточных разбиений внутренней структуры гетерогенной среды по стеку ее послойных изображений // *Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии*. – 2022. – Т. 6 (1). – С. 52-58.
15. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М. : Мир, 1982. – 336 с.

© А. Ю. Кутисцева, Д. В. Добролюбова, 2024