

А. Г. Фатьянов^{1}*

Сейсмические волновые поля в сферически-симметричной Земле с жидким ядром. Сравнение классической и новой асимптотик

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: fat@nmsf.sccc.ru

Аннотация. В работе построено аналитическое решение сейсмических волновых полей для радиально-симметричного трехслойного шара планетарных размеров. Показано, что использование классической асимптотики функций Бесселя для устойчивого вычисления решения дает ошибку. В работе использована оригинальная асимптотика, разработанная ранее автором. Исследованы и с помощью новой асимптотики раскрыты вычислительные особенности разных типов, возникающие в аналитическом решении. Исследована погрешность при переходе на асимптотику в аналитическом решении. Доказано, что она по степенному закону стремиться к нулю при увеличении индексов бесселевых функций. Это позволило создать метод устойчивого вычисления полученного аналитического решения для шара планетарных размеров. Созданная на этой основе программа дает возможность проводить исследования волновых полей с высокой детальностью. Проведены расчеты для усредненной модели Земли, включающей мантию, жидкое и твердое ядра. Показано, что раньше РКР – волны ничего не приходит. Т.е. “предвестники” в данном случае не возникают.

Ключевые слова: сферически-симметричная Земля, усредненная модель Земли, мантия, жидкое и твердые ядра, аналитическое решение, классическая асимптотика, погрешность, новая асимптотика, устойчивое вычисление решения, высокая детальность

A. G. Fatyanov^{1}*

Seismic wave fields in a spherically symmetric Earth with a liquid core. Comparison of classical and new asymptotics

¹ Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS. Novosibirsk,
Russian Federation
* e-mail: fat@nmsf.sccc.ru

Abstract. In this paper we construct an analytical solution of seismic wave fields for a radially symmetric three-layer sphere of planetary dimensions. It is shown that the use of the classical asymptotics of Bessel functions for the stable calculation of the solution gives a hindrance. The original asymptotics developed earlier by the author is used in this work. Computational features of different types arising in the analytic solution have been investigated and disclosed using the new asymptotics. The error of the transition to the asymptotic in the analytic solution is investigated. It was proved that it tends to zero by the power law when the indices of the Besselian functions increase. This made it possible to create a method for steady calculation of the obtained analytic solution for a sphere of planetary size. The program created on this basis makes it possible to carry out investigations of wave fields with a high level of detail. Calculations have been carried out for an averaged model of the Earth including the mantle, liquid and solid cores. It is shown that nothing comes before PKP-wave. I.e., the "precursors" in this case do not arise.

Keywords: spherically symmetric Earth, averaged model of the Earth, mantle, liquid and solid cores, analytic solution, classical asymptotics, error, new asymptotics, stable solution computation, high accuracy

Введение

В работе рассмотрена задача построения аналитического решения для сейсмических волновых полей в трехслойном шаре произвольного размера. Это описывает упрощенную модель Земли, включающую мантию, жидкое и твердое ядра. Задача построения аналитического решения для волновых полей в шаре рассматривалась во многих работах [1, 2]. Решение этой задачи строится следующим образом. На первом этапе применяется классическое преобразование Фурье-Лежандра. В итоге исходная постановка для распространения сейсмических волн сводится к двухпараметрическому семейству краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметрами здесь являются временные и пространственные частоты. Далее для нахождения аналитического решения осуществляется переход к потенциалам продольных и поперечных волн. Это позволяет свести уравнения движения к классическим уравнениям Бесселя. Получены решения в мантии, жидком ядре и твердом ядре с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты определяются из известных краевых условий на границах сред. В решении содержатся функции Бесселя. Поскольку функции Бесселя при возрастании индекса быстро стремятся к нулю/бесконечности возникает неустойчивость. Для её преодоления нужно использовать асимптотику. Показано, что использование классической асимптотики при вычислении решения дает ошибку. В работе использована оригинальная асимптотика, разработанная ранее автором. Исследованы и с помощью новой асимптотики раскрыты вычислительные особенности разных типов, возникающие в аналитическом решении. Исследована погрешность при переходе на асимптотику в аналитическом решении. Доказано, что она по степенному закону стремится к нулю при увеличении индексов бесселевых функций. Это позволило создать метод устойчивого вычисления полученного аналитического решения для шара планетарных размеров. Созданная на этой основе программа дает возможность проводить исследования волновых полей с высокой детальностью. Проведены расчеты для усредненной модели Земли, включающей мантию, жидкое и твердое ядра. Показано, что раньше РКР – волны ничего не приходит. Т.е. “предвестники” в данном случае не возникают.

Постановка задачи

В работе задача моделирования сейсмических волн рассматривается в сферической системе координат ($0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 < \varphi \leq 2\pi$) для шара планетарных размеров. Требуется определить вектор смещения $\hat{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$ из хорошо известных динамических уравнений упругости [3] с помощью построения аналитического решения для радиально-симметричного трехслойного шара. Эта модель дает усредненное описание реальной Земли, включающее мантию, жидкое и твердое ядра.

Приложим на поверхности шара $r = R_1$ в точке $\theta = 0$ сосредоточенное воздействие типа радиальной осесимметричной силы:

$$\sigma_{rr} = \frac{\delta(\theta)}{R^2 \sin \theta} f(t), \quad \sigma_{r\theta} = 0. \quad (1)$$

В (1) $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ – напряжения, $f(t)$ – входной импульс Гаусса-Пузырева, f_0 – его видимая частота [4, 5]. В этом случае возбуждается поле смещений $\hat{u} = u_r(r, \theta, t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\hat{e}_\theta$ не зависящее от координаты φ .

Краевые условия на границах разрыва параметров при контакте с жидкостью

$$\sigma_{rr}|_{R_m+0} = \sigma_{rr}|_{R_m-0}, \quad u_r|_{R_m+0} = u_r|_{R_m-0} \text{ и } \sigma_{r\theta} = 0 \text{ со стороны твердого тела.} \quad (2)$$

Для завершения постановки добавляются условие ограниченности решения в центре шара $\hat{u}|_{r=0} < \infty$ и начальные условия:

$$u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Построение аналитического решения для волновых полей в шаре

Для построения решения применяется преобразование Фурье-Лежандра по t и θ [3, 6].

$$u_r(r, \theta, t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} u_r(r, k, n) e^{i\omega_n t} P_k(\cos \theta), \quad u_\theta(r, \theta, t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} u_\theta(r, k, n) e^{i\omega_n t} P_k^1(\cos \theta) \quad (4)$$

В (4) $P_k(x)$, $P_k^1(x)$, – полиномы Лежандра [1], $\omega_n = n\pi / T$.

В итоге исходная постановка сводится в спектральной области к двухпараметрическому семейству (k, ω_n) краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для сокращения записи несущественные индексы в дальнейшем опускаются.

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} - \frac{k_1}{r} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{du_\theta}{dr} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{k_1}{r^2} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} u_\theta - \frac{1}{r^2} \left(2 + k_1 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) u_r + \frac{\omega^2}{V_p^2} u_r = 0,$$

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\theta}{dr} + \frac{1}{r} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{du_r}{dr} - \frac{k_1}{r^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} u_r + \frac{\omega^2}{V_s^2} u_\theta = 0. \quad (5)$$

$$\sigma_{rr} \equiv (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + \frac{2\lambda}{r} u_r - \frac{k_1}{r} \lambda u_\theta \Big|_{r=R_1} = \frac{2k+1}{2R_1^2} F(\omega),$$

$$\sigma_{r\theta} \equiv \mu \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} u_r \right) \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (6)$$

В (5) и (6) $F(\omega)$ - спектр входного сигнала $f(t)$, $k_1 = k(k+1)$, λ и μ – упругие параметры Ламе.

К постановке (5) и (6) еще добавляются условия сопряжения (2) в спектральной области и условие ограниченности решения в центре шара.

Далее для нахождения аналитического решения осуществляется переход к потенциалам продольных u_p и поперечных u_s волн. Хорошо известно классическое представление полного поля для шара через потенциалы [2]. В данной работе, следуя [7] оно берется в виде:

$$u_r = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_p}{r^{0.5}} \right) + \frac{k(k+1)}{r^{1.5}} u_s, \quad u_\theta = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_s}{r^{0.5}} \right) + \frac{1}{r^{1.5}} u_s + \frac{1}{r^{1.5}} u_p. \quad (7)$$

Представление (7) в случае сферической системы координат позволяет сразу свести уравнения движения (5) к классическим уравнениям Бесселя:

$$\frac{d^2 u_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_p}{dr} + \frac{\omega_n^2}{V_p^2} u_p - \frac{(k+0.5)^2}{r^2} u_p = 0, \quad \frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} + \frac{\omega_n^2}{V_s^2} u_s - \frac{(k+0.5)^2}{r^2} u_s = 0. \quad (8)$$

Сведение к бесселевым функциям (8) существенно упрощает нахождение искомого решения.

Уравнения (5) справедливы для твердой среды. В жидкой среде поперечных волн нет. Поэтому в (7) $u_s = 0$. Смещения и напряжение будут даваться выражениями:

$$u_r = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_p}{r^{0.5}} \right), \quad u_\theta = \frac{u_p}{r^{1.5}}, \quad \sigma_{rr} = -\rho \frac{\omega^2}{r^{0.5}} u_p. \quad (9)$$

Следуя [1] решение получаем в следующем виде.

В твердом ядре при $r \in [0, R_3 - 0]$

$$u_p(r) = c_1 J_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p3}} r\right) + d_1 Y_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p3}} r\right), \quad u_s(r) = c_2 J_\nu\left(\frac{\omega}{V_{s3}} r\right) + d_2 Y_\nu\left(\frac{\omega}{V_{s3}} r\right), \quad \nu = k + \frac{1}{2} \quad (10)$$

Из условия ограниченности решения в центре шара следует, что $d_1 = 0$ и $d_2 = 0$. Таким образом условие ограниченности решения при $r = 0$ в аналитическом решении выполняется автоматически.

В жидком ядре при $r \in [R_3 + 0, R_2 - 0]$

$$u_p(r) = c_3 J_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p2}} r\right) + c_4 Y_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p2}} r\right) \quad (11)$$

В мантии при $r \in [R_2 + 0, R_1]$

$$u_p(r) = c_5 J_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p1}} r\right) + c_6 Y_\nu\left(\frac{\omega}{V_{p1}} r\right), \quad u_s(r) = c_7 J_\nu\left(\frac{\omega}{V_{s1}} r\right) + c_8 Y_\nu\left(\frac{\omega}{V_{s1}} r\right) \quad (12)$$

В (10)-(12) V_{p3} , V_{p2} , V_{p1} - соответственно скорости продольных волн в твердом и жидком ядрах и мантии Земли. Соответственно и скорости поперечных волн. С учетом краевых условий (6) и (2) с учетом (9) получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения восьми неизвестных коэффициентов $c_1 - c_8$:

$$A\hat{c} = F \quad (13)$$

Матрица из (13) здесь не приводится в силу ее громоздкости и прозрачности получения.

Устойчивое вычисление аналитического решения без ошибки

Теоретически формульное или числовое решение СЛАУ (13) позволяет получить коэффициенты $c_1 - c_8$, затем u_r и u_θ в спектральной области и с помощью (4) искомое решение в физической области. Однако для шара планетарных размеров этого сделать нельзя. Дело в том, что функции Бесселя при увеличении индекса k быстро стремятся к нулю и бесконечности [1]. Поэтому при решении (13) возникают различные особенности типа $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0 \cdot \infty - \infty \cdot 0}{0 \cdot \infty - \infty \cdot 0}$. Причем, чем больше радиус шара в относительных величинах (длинах волн), тем быстрее они возникают. В этой ситуации вычисление на компьютере становится неустойчивым. Для устойчивого вычисления решения нужно использовать асимптотику. В [7, 8, 9] получена новая асимптотика для функций Бесселя, которая имеет наглядный физический смысл. А именно, при $J_\nu(z) \sim 0$ и $Y_\nu(z) \sim \infty$

$$z \frac{Z'_v(z)}{Z_v(z)} \sim \pm \sqrt{v^2 - z^2} \quad (14)$$

В (14) $Z'_v(z)$ - произвольная цилиндрическая функция $J_v(z)$, $Y_v(z)$.

Определены коэффициенты $c_1 - c_8$ из решения СЛАУ (13). Они не приводятся из-за их громоздкости. Особенности, которые в них возникают типа $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ при выходе за границы числового диапазона раскрываются аналогично случаю однородного шара в [7]. Наиболее сложным в вычислительном плане является наличие в решении особенности типа $\frac{0 \cdot \infty - \infty \cdot 0}{0 \cdot \infty - \infty \cdot 0}$. Далее это рассматривается более подробно.

В формулах для решения присутствуют выражения типа

$$z_{p1} \frac{g_2 J'_v(z_{p1}) - g_4 Y'_v(z_{p1})}{g_2 J_v(z_{p1}) - g_4 Y_v(z_{p1})} \quad (15)$$

В (15) использованы следующие обозначения:

$$g_2 = b_2 Y_v(z_{p2}), \quad g_4 = b_4 J_v(z_{p2}), \quad z_{p1} = \frac{\omega}{V_{p1}} R_1, \quad z_{p2} = \frac{\omega}{V_{p1}} R_2 \quad (16)$$

При больших v в числителе и знаменателе (15) возникают особенности типа $\infty \cdot 0 - 0 \cdot \infty$. Исследуем характер асимптотического поведения $g_2 J'_v(z_{p1})$ и $g_4 Y'_v(z_{p1})$ при $v \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим их отношение с учетом того, что $R_1 > R_2$ и $J_v(z_1) \cdot Y_v(z_2) \sim -\frac{1}{\pi v} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^v$ [10].

$$\frac{g_4 Y_v(z_{p1})}{g_2 J_v(z_{p1})} \sim c \frac{J_v(z_{p2}) Y_v(z_{p1})}{Y_v(z_{p2}) J_v(z_{p1})} \sim c \left(\frac{z_{p2}}{z_{p1}}\right)^{2v} = c \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2v} \sim 0 \quad (17)$$

Аналогично получается и для числителя в (15). Из (14), (15) и (17) тогда следует, что

$$z_{p1} \frac{g_2 J'_v(z_{p1}) - g_4 Y'_v(z_{p1})}{g_2 J_v(z_{p1}) - g_4 Y_v(z_{p1})} \sim z_{p1} \frac{g_2 J'_v(z_{p1})}{g_2 J_v(z_{p1})} = z_{p1} \frac{J'_v(z_{p1})}{J_v(z_{p1})} \sim \sqrt{v^2 - z_{p1}^2} \quad (18)$$

Выражение (18) раскрывает особенность в (15).

Таким образом показано, что погрешность при переходе на асимптотику в аналитическом решении по степенному закону стремиться к нулю при возрастании индексов бесселевых функций.

Сравнение классической и новой асимптотик

Возникает вопрос. Почему нельзя использовать классическую асимптотику. Из [10] следует, что при $\nu \gg z$ классическая асимптотика будет давать

$$z \frac{z'_\nu(z)}{z_\nu(z)} \sim \pm \nu \quad (19)$$

Из (14) и (19) видно, что при $\nu \gg z$ классическая и новая асимптотики будут совпадать.

Рассчитано сейсмическое поле U_r компоненты для однородного шара (рис. 1 и рис. 2) с радиусом Земли (6371км.). Видимая частота в источнике – 1 герц. По вертикали приведено время в секундах (возрастает вниз). По горизонтали – удаление в градусах.

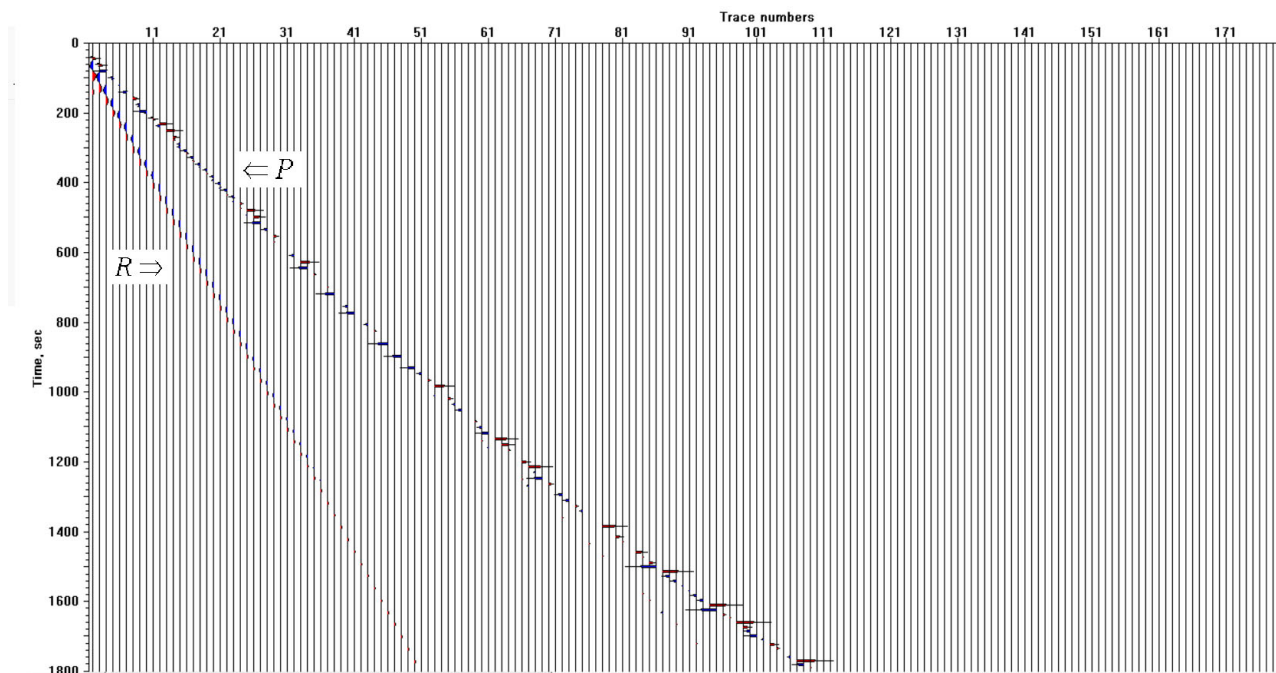


Рис. 1. Вертикальная компонента U_r сейсмического поля для однородного шара. В алгоритме расчета используется классическая асимптотика. По вертикали время в секундах (возрастает вниз), по горизонтали расстояние в градусах. Аномально малая амплитуда релеевской волны.

В алгоритме используется классическая асимптотика (рис. 1) и новая асимптотика (рис. 2). Символы P и R обозначают продольную и рэлеевскую волны. Видно, что при использовании классической асимптотики рэлеевская волна имеет аномально малую амплитуду. Она меньше прямой P-волны. Это противоречит основным фактам динамической теории распространения сейсмических волн так как здесь источник расположен на дневной поверхности [2]. Это говорит о том, что классическую асимптотику для расчета волновых полей в шаре планетарных размеров использовать нельзя. Она дает ошибку. В [9] показано, что и для скалярного уравнения классическая асимптотика для шара планетарных размеров также дает ошибку.

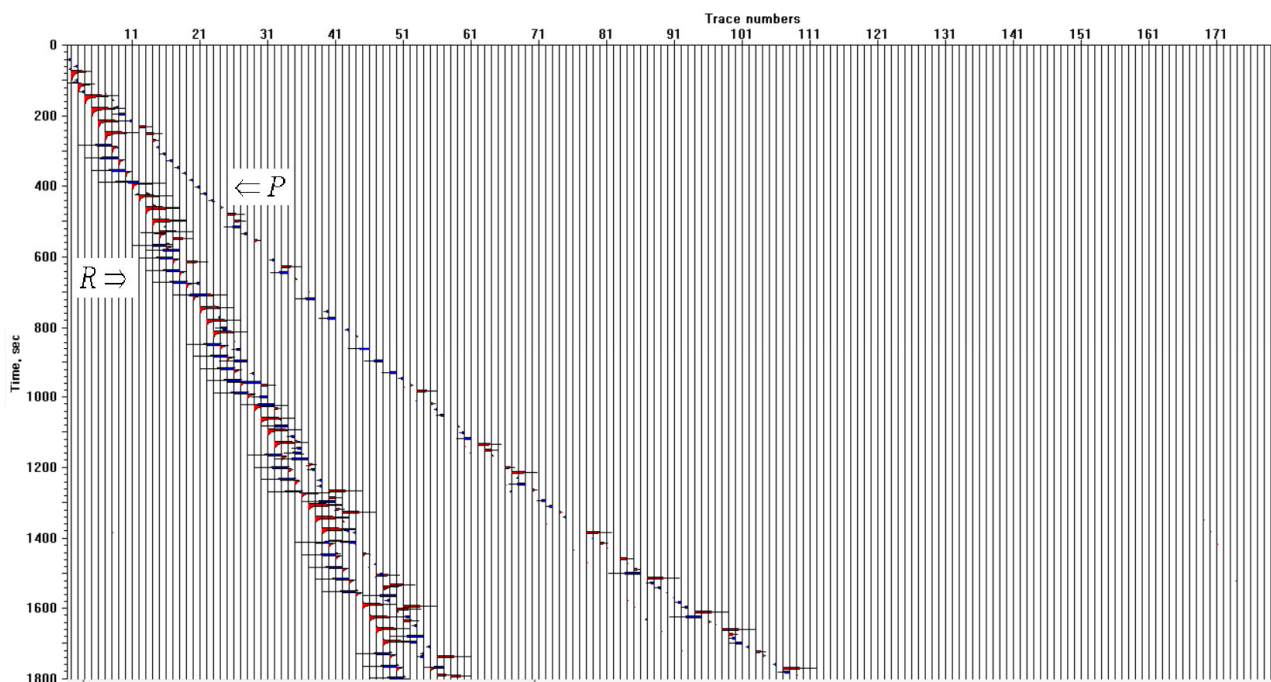


Рис. 2. Вертикальная компонента U_r сейсмического поля для однородного шара. В алгоритме расчета используется новая асимптотика. По вертикали время в секундах (возрастает вниз), по горизонтали расстояние в градусах. Для наглядности поле выдано с обрезкой амплитуды.

Таким образом создан метод устойчивого вычисления полученного аналитического решения. Использование новой асимптотики позволило вычислять волновые поля без погрешности. Созданная на этой основе параллельная программа дала возможность проводить исследования волновых полей для шара планетарных размеров с высокой детальностью.

Результаты аналитического решения

В 1934 году Гутенберг и Рихтер обнаружили волновые фазы “предвестники”, наблюдаемые на реальных сейсмограммах впереди первого вступления РКР – волн [11]. Обозначение РКР в сейсмологии означает продольные волны P,

которые проходят через границу ядро – мантия [2]. Открытие “предвестников” породило дискуссии, которые не прекращаются и в настоящее время. От понимания этого фундаментального явления зависит наше представление о строении земного ядра, геотектоники и возникновения глубокофокусных землетрясений [12-19]. Отметим, что в зарубежной литературе утвердилось устойчивое мнение, что “предвестники” обусловлены рассеянием сейсмических волн от неоднородности в низах мантии. При этом в работе [8] для Р - волн показано, что “предвестники” возникают и в классической радиально-симметричной дискретной модели Земли АК135 [20].

Приведен фрагмент расчета u_r компоненты сейсмического волнового поля для усредненной модели радиально-симметричной Земли, включающей мантию, жидкое и твердое ядра (рис. 3). В мантии скорости продольных, поперечных и плотность равны соответственно $V_p = 12.2$ км/сек, $V_s = 6.5$ км/сек, $\rho = 4500$ кг/м³. В жидком ядре - $V_p = 9.0$ км/сек, $V_s = 0$ км/сек, $\rho = 11000$ кг/м³. В твердом ядре - $V_p = 10.0$ км/сек, $V_s = 5.0$ км/сек, $\rho = 13000$ кг/м³. Видимая частота $f_0 = 1$ герц. Волна РКР выделена стрелкой. По горизонтали приведено расстояние в градусах (155-133). По вертикали – время в секундах (1150-1240).

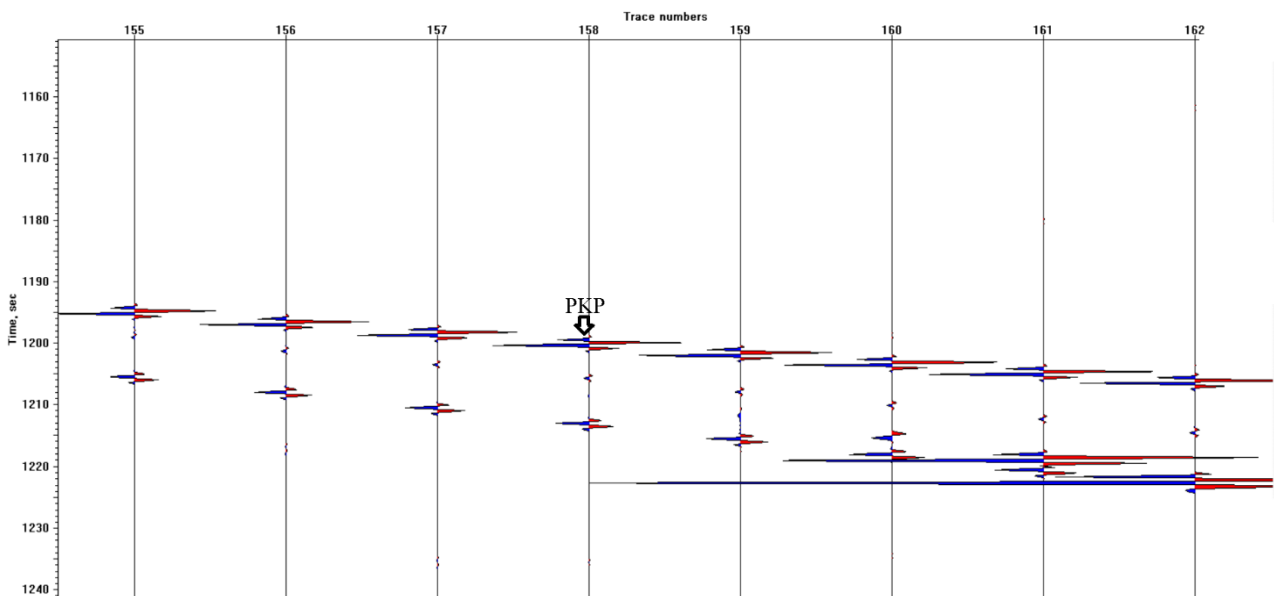


Рис. 3. Фрагмент расчета u_r компоненты сейсмического волнового поля для усредненной модели Земли, включающей мантию, жидкое и твердое ядра. Волна РКР выделена стрелкой. По горизонтали – расстояние в градусах. По вертикали – время в секундах (возрастает вниз).

Обнаружено, что раньше волны РКР ничего не приходит (рис. 3). То есть “предвестники” для такой упрощенной модели Земли не возникают. Нужно рассматривать более реалистичные модели сферически-симметричной Земли.

Заключение

В работе построено аналитическое решение сейсмических волновых полей для радиально-симметричного трехслойного шара планетарных размеров. Показано, что использование классической асимптотики функций Бесселя для устойчивого вычисления решения дает ошибку. В работе использована оригинальная асимптотика, разработанная ранее автором. Исследованы и с помощью новой асимптотики раскрыты вычислительные особенности разных типов, возникающие в аналитическом решении. Исследована погрешность при переходе на асимптотику в аналитическом решении. Доказано, что она по степенному закону стремится к нулю при увеличении индексов бесселевых функций. Это позволило создать метод устойчивого вычисления полученного аналитического решения для шара планетарных размеров. Созданная на этой основе программа дает возможность проводить исследования волновых полей с высокой детальностью. Проведены расчеты для усредненной модели Земли, включающей мантию, жидкое и твердое ядра. Показано, что раньше РКР – волны ничего не приходит. Т.е. “предвестники” в данном случае не возникают.

Благодарности

Работа выполнена в соответствии с Государственным заданием ИВМиМГ СО РАН № 0251-2021-0004.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики – М.: Наука. 2004. – 798 с.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология – М.: Мир. 1983. – 880 с.
3. Бурмин В. Ю., Кравцов Д. С., Лукьянов И. В., Фатьянов А. Г. Численное моделирование *SH*-волны в неоднородной неупругой Земле // Геофизические исследования. – 2014. – Т. 15. – № 2. – С. 5-14.
4. A. G. Fatyanov, V. Yu. Burmin. The focusing effect of *P*-wave in the Moon's and Earth's low-velocity core. Analytical solution // Planetary and Space Science. – 2018. – Vol. 153. – P. 100-106.
5. Фатьянов А. Г., Бурмин В. Ю. Эффект фокусировки *P* – волн для низкоскоростного ядра в Земле. Аналитическое решение. // Докл. РАН. – Т.478. – № 3. – 2018. – С.342-345.
6. Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // ДАН. 1990. – Т. 310. – № 2. – С. 323-327.
7. Фатьянов А. Г., Бурмин В. Ю. Кинематика волновых полей в шаре // Геофизические процессы и биосфера. 2021. – Т. 20. – № 1. – С. 61-67.
8. Фатьянов А. Г., Бурмин В. Ю. Возникновение предвестников *PKP*-волн в радиально-симметричной слоистой Земле // Докл. РАН. – 2019. – Т. 489. – № 1. – С. 84-88.
9. Фатьянов А. Г. Устойчивое аналитическое решение для волновых полей в шаре // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23. – № 3. – С. 91-103.
10. Shanjie Zhang, Jian-Ming Jin Computation of special functions. John Wiley, 1996. – 717p.
11. Gutenberg B, Richter C F. On seismic waves: I. Gerlands Beitr Geophysik, 1934. – 43. – P. 56–133
12. Wen L., Helmberger D. V. Ultra-Low velocity zones near the core-mantle boundary from broadband *PKP* precursors. Science. – 1998. – V. 279. – Iss. 5357. – P. 1701–1703

13. Hedlin M. A. H., Shearer P. M., Earle P. S. Seismic evidence for small-scale heterogeneity throughout the Earth's mantle. *Nature*. – 1997. – V. 387 (6629). – P. 145–150.
14. Gutenberg B. The boundary of the Earth's inner core. *Eos Trans AGU*, 1957. –V. 38. – P. 750–753
15. Bullen K. E., Burke-Gaffney T. N. Diffracted Seismic waves near the PKP Caustic // *Geophys J. Int.* – 1958. –V. 1. – P. 9–17.
16. Bolt B. A. Gutenberg's early PKP observations. // *Nature*. – 1962. – V. – 196. – P. 122–124.
17. Sacks I. S., Saa G. The structure of the transition zone between the inner core and the outer core. // *Year Book Carnegie Inst. Washington*. – 1969. – V. 69. – P. 419–426.
18. Cleary J R, Haddon R A W. Seismic wave scattering near the core-mantle boundary: a new interpretation of precursors to PKP // *Nature*. – 1972. – V. 240. – P.549–551
19. Бурмин В. Ю. Некоторые обратные задачи сейсмологии. Теория, эксперименты, результаты. – М.: «Наука». 2019. – 276 с.
20. Kennett B. L. N., Engdahl E. R., Buland R. Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes // *Geophys. J. Int.* – 1995. – No. 122. – P. 108–124.

© А. Г. Фатьянов, 2023