

В. В. Сказка^{1}, А. В. Азаров¹*

О точности вычислений решений линейных систем уравнений в задачах вычисления параметров трубных волн при экстремально больших числах обусловленности матриц

¹ Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск,
Российская Федерация
* e-mail: vskazka@gmail.com

Аннотация. Фазовые характеристики поверхностных волн, измеряемые в шахте, теоретически позволяют вести мониторинг состояния стен шахты. Для разработки алгоритмов мониторинга необходимы программы вычисления фазовых характеристик в слоистых средах. При вычислении фазовых характеристик высокочастотных туннельных волн в неоднородных средах возникла следующая ситуация. Численно приходится решать системы линейных уравнений, у которых числа обусловленности большие - порядка 1040. Тем не менее, вычисления «как правило» остаются устойчивыми. В статье приводится объяснение этого явления. Оказывается, полученные матрицы таковы, что их можно представить в виде произведения хорошо обусловленной матрицы на диагональную матрицу, у которой на диагонали могут стоять очень большие и очень маленькие элементы. Эта матрица и обеспечивает очень большое число обусловленности. Оказывается, при обращении таких матриц, представляющих произведение хорошо обусловленной матрицы и диагональной, наиболее распространенным методом решение получается «как правило» устойчивым к ошибкам округления при вычислении. Это все позволяет строить устойчивые алгоритмы, несмотря на очень большие числа обусловленности матриц.

Ключевые слова: туннельные волны, поверхностные волны, системы линейных уравнений, число обусловленности

V. V. Skazka^{1}, A. V. Azarov¹*

On the accuracy of computing solutions of linear systems of equations in problems of calculating tunnel wave parameters for extremely large condition numbers of the matrices

¹ Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,
Russian Federation
* e-mail: vskazka@gmail.com

Abstract. The phase characteristics of surface waves measured in the mine theoretically allow monitoring the condition of the mine walls. To develop monitoring algorithms, programs for calculating phase characteristics in layered media are needed. When calculating the phase characteristics of high-frequency tunneling waves in inhomogeneous media, the following situation arose. Numerically, one has to solve systems of linear equations, in which the condition numbers are large - about 1040. Nevertheless, the calculations “as a rule” remain stable. The article provides an explanation of this phenomenon. It turns out that the resulting matrices are such that they can be represented as a product of a well-conditioned matrix and a diagonal matrix, which can have very large and very small elements on the diagonal. This matrix provides a very large condition number. It turns out that when inverting such matrices, which are the product of a well-conditioned matrix and a diagonal one, the

most common method is to obtain a solution that is “generally” resistant to roundoff errors in the calculation. All this makes it possible to build stable algorithms, despite the very large condition numbers of matrices.

Keywords: tunnel waves, surface waves, systems of linear equations, condition number

Введение

Статья посвящена описанию некоторых математических проблем, возникающих при изучении возможности использования туннельных волн для обнаружения опасных зон, возникающих вблизи горных выработок. И является частью соответствующих работ, ведущихся в ИГД СО РАН. По поводу истории этой части вопроса, а также состояния дел на текущий момент см. [1-4]. В данной же статье мы остановимся только на ряде математических вопросов.

Постановка задачи

Пусть у нас имеется бесконечная, радиально симметричная упругая среда, с вырезанным туннелем по оси Z , параметры которого в цилиндрической системе координат показаны на следующем рисунке.

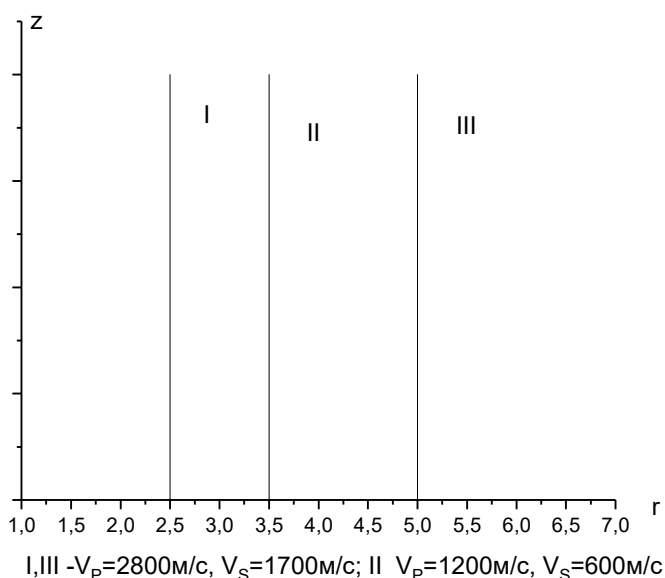


Рис. 2. Приблизительная модель среды. Плотность считается постоянной, и поэтому не указывается.

Здесь при $0 < r < r_0 = 2.5$ - пустое пространство, далее идут однородные по z слои, $r_0 < r < r_1 = 3.5$, $r_1 < r < r_2 = 5$, $r_2 < r$ скоростные характеристики которых указаны на рисунке.

Система уравнений Ламе в цилиндрической системе координат (при постоянных параметрах), при условии, что решение не будет зависеть от угла записывается следующим образом [5]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} &= V_P^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} + V_S^2 \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial t^2} &= V_P^2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{V_S^2}{r} \frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r},\end{aligned}\tag{11}$$

где обозначено

$$\Delta = \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{u}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}, \quad \omega_\varphi = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r}$$

Уравнение (11) должно выполняться там, где коэффициенты постоянны, на границах должны совпадать сами решения \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_z и напряжения

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r} \right)\tag{12}$$

То есть

$$[\mathbf{u}_r]_{r=r_i} = [\mathbf{u}_z]_{r=r_i} = [\sigma_r]_{r=r_i} = [\tau_{rz}]_{r=r_i} = 0, \quad i = 1, 2\tag{13}$$

Также должно выполняться

$$\sigma_r|_{r=r_0} = \tau_{rz}|_{r=r_0} = 0\tag{14}$$

Задача состоит в нахождении экспоненциально убывающего по r на бесконечности решения задачи (11)-(14), имеющего вид

$$\mathbf{u}_r = U(r) \cos(kz) \exp(i\omega t), \quad \mathbf{u}_z = W(r) \sin(kz) \exp(i\omega t)\tag{15}$$

Полученные в соответствии с (12) напряжения имеют вид

$$\sigma_r = \sigma(r) \cos(kz) \exp(i\omega t), \quad \tau_{rz} = \tau(r) \sin(kz) \exp(i\omega t)\tag{16}$$

После подстановки (15) (16) в (11)-(14) в каждом слое по r для нахождения U, W мы получаем систему уравнений. Решая которую, найдем четыре независимых решения. Обозначим их через $U_i(r), W_i(r)$ $i = 1, \dots, 4$. Соответствующие этим решениям напряжения (16) мы будем обозначать $\sigma_i(r), \tau_i(r)$. Сейчас нам не очень важны точный вид этих функций. Заметим только, что они выражаются

через модифицированные и обычные функции Бесселя с индексами ноль и единица.

На каждом рассматриваемом интервале по r у нас имеется матрица

$$\mathfrak{M}^j(r) = \begin{pmatrix} U_1^j(r) & U_2^j(r) & U_3^j(r) & U_4^j(r) \\ W_1^j(r) & W_2^j(r) & W_3^j(r) & W_4^j(r) \\ \sigma_1^j(r) & \sigma_2^j(r) & \sigma_3^j(r) & \sigma_4^j(r) \\ \tau_1^j(r) & \tau_2^j(r) & \tau_3^j(r) & \tau_4^j(r) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Здесь верхний индекс $j = 1, 2, 3$ соответствует области изменения r в соответствии с рис. 1.

Для любого решения (11) вида (15) в соответствующей области изменения r будет существовать такой вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, что решение и соответствующие ему напряжения будут задаваться следующим выражением

$$\begin{pmatrix} U \\ W \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix} (r) = \mathfrak{M}^j(r)x \quad (18)$$

Итак, задача нахождения параметров туннельной волны указанного вида заключается в том, чтобы при заданном ω найти такое k , что полученное в соответствии с (18), (15), (16) решение будет удовлетворять (13), (14) и убывать экспоненциально на бесконечности. Последнее подразумевает, что параметры такие, что в \mathfrak{M}^3 фигурируют только модифицированные функции Бесселя, причем будем считать, что убывающие на бесконечности функции K_n присутствуют только в первом и втором столбце, а возрастающие I_n в третьем и четвертом.

Обозначим

$$\begin{aligned} M^1 &= \mathfrak{M}^1(r_0), M^2 = \mathfrak{M}^1(r_1), M^3 = \mathfrak{M}^2(r_1), M^4 = \mathfrak{M}^2(r_2), M^5 = \mathfrak{M}^3(r_2) \\ f_i &= \left(M_{i+2,1}^1, M_{i+2,2}^1, M_{i+2,3}^1, M_{i+2,4}^1 \right)^T, \quad i = 1, 2 \\ h_1 &= (1, 0, 0, 0)^T, \quad h_2 = (0, 1, 0, 0)^T \\ g_i &= \left(M^2 \right)^{-1} M^3 \left(M^4 \right)^{-1} M^5 h_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

Задача нахождения такого k теперь может быть сведена к следующей – надо при заданном ω найти такое k , при котором существуют такие ненулевые α, β такие, что $(f_1, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f_2, \alpha g_1 + \beta g_2) = 0$. Последнее означает, что

$$\det \begin{pmatrix} (f_1, g_1) & (f_1, g_2) \\ (f_2, g_1) & (f_2, g_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

Таким образом ищется: при каком k справедливо (20) для данного ω .

Результаты расчетов и обсуждение методов

Ниже приводятся результаты расчетов нахождения фазовых скоростей туннельных волн в рассматриваемой среде.

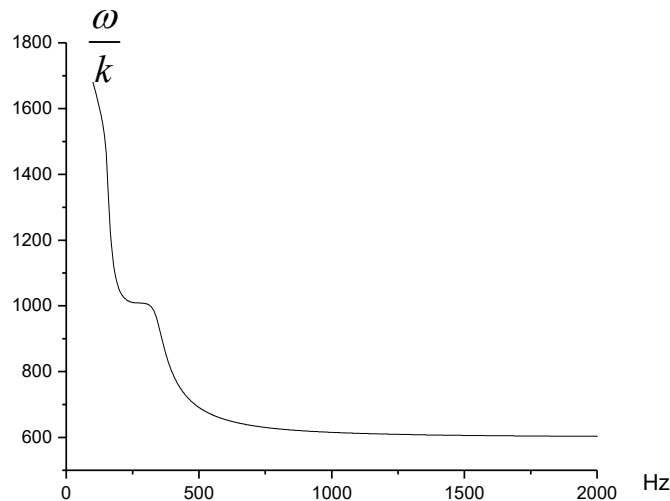


Рис. 2. График фазовой скорости

После того как были получены расчетные кривые, стал вопрос о точности вычислений. Для этого были, в частности, вычислены числа обусловленности матриц M^j из (19). Для точности вычисления решений линейных систем уравнений надо, в общем случае, чтобы числа обусловленности матриц были бы не слишком велики (см., например, [6]). Ниже приведены графики десятичных логарифмов чисел обусловленности матриц M^j при изменении ω от 100 до 2000гц, при этом k было такое, что выполнялось (20). Фактически эти графики синхронизированы с рис. 2.

Как правило, считается, что если число обусловленности больше, чем 10^{12} , то смысла особенного решать систему линейных уравнений нет. Ошибки округления приведут к большому отклонению полученного решения от точного, см. [6].

Для проверки точности вычислений был использован свободно распространяемый пакет вычислений с произвольной точностью MPFUN2020 (см. [7,8]). Из

нескольких пакетов такого рода этот был выбран из-за того, что в нем реализованы все функции Бесселя.

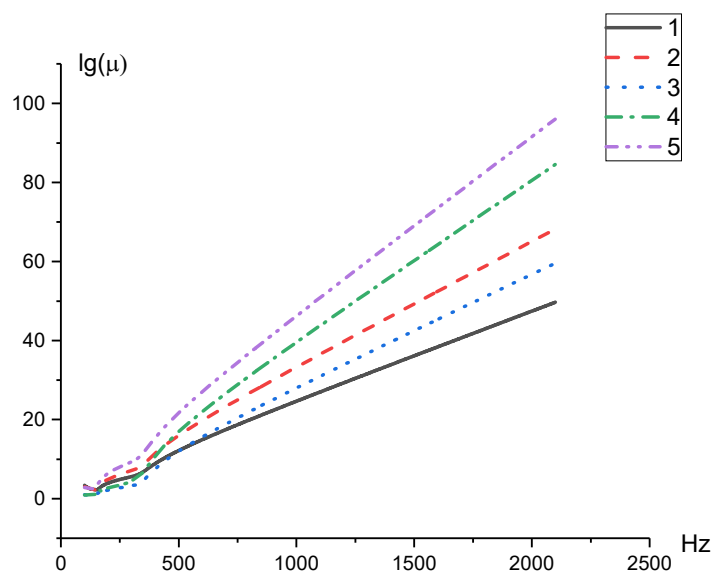


Рис. 3. Логарифмы чисел обусловленности

Был проведен повторный расчет с точностью 100 цифр в мантиссе. Для такой точности, числа обусловленности 10^{60} не являются плохими. И выяснилось, что расчеты с обычной машинной двойной точностью и сделанные с точностью 100 цифр в мантиссе совпадают с большой точностью (8-10 значащих чисел в мантиссе).

Ниже мы дадим частичное объяснение этому явлению.

В настоящее время наиболее распространённым способом решения линейных систем уравнений является метод LU разложения (см, например [9]), то есть при решении системы уравнений $Mu = f$ матрица M представляется в виде $M = LU_M$, где L - нижняя треугольная матрица с единицей на диагонали, а U_M - верхняя треугольная матрица. Нижний индекс M подчеркивает, что это верхняя треугольная матрица в LU разложении матрицы M .

Чтобы дальнейшее стало более понятно, приведем приблизительное численное значение одной из матриц M^j для частоты в 1кГц:

$$M = \begin{pmatrix} 0.13 \cdot 10^{-18} & 0.22 \cdot 10^{-17} & 0.89 \cdot 10^{17} & -0.70 \cdot 10^{16} \\ 0.14 \cdot 10^{-18} & 0.20 \cdot 10^{-17} & -0.93 \cdot 10^{17} & 0.65 \cdot 10^{16} \\ -0.14 \cdot 10^{-16} & -0.303 \cdot 10^{-15} & 0.12 \cdot 10^{20} & -0.95 \cdot 10^{18} \\ -0.20 \cdot 10^{-16} & -0.300 \cdot 10^{-15} & -0.12 \cdot 10^{20} & 0.96 \cdot 10^{18} \end{pmatrix}$$

Из структуры матрицы M и численных значений ее элементов легко видна причина большего числа обусловленности.

Представим $M = AD$, где D - диагональная матрица с диагональными элементами $d_{i,i} = \max_{j=1,2,3,4} |M_{j,i}|$. По сути, матрица A получается из матрицы M путем деления каждого столбца на максимум модуля элемента этого столбца матрицы.

Оказывается, в рассматриваемом случае число обусловленности матрицы A невелико. Порядка несколько сотен. Из способа получения матрицы L ясно, что нам безразлично – проводить получение матрицы L для матрицы A или матрицы M . По сути, проводятся одни и те же действия.

То, что это так, а также равенство соответствующих матриц видно и из следующей цепочки равенств

$$M = LU_M = AD = LU_A D$$

Важно то, что при вычислении U_M алгоритм таков, что по сути учитывает структуру матрицы и то что $U_M = U_A D$. Мы можем сначала выделить множитель D , получить матрицу U_A , а потом получить U_M . А можем сразу получить U_M в рамках LU алгоритма. Получится одна и та же матрица. Вычисления протекают без потери точности.

Тем самым решение уравнения $Mu = f$ фактически, не оговаривая этого, получается из формулы

$$u = D^{-1}U_A^{-1}L^{-1}f \quad (21)$$

Ясно, что все возможные неприятности при решении уравнения могут получаться из-за применения матрицы D^{-1} . Получение матрицы D^{-1} - устойчивая операция и здесь нет никаких проблем с числом обусловленности. Вычисление $U_A^{-1}L^{-1}f$ может быть проведено с гарантированной точностью в силу того, что число обусловленности матрицы A мало.

Конечно, эффект неустойчивости, вытекающий из-за большего числа обусловленности матрицы, никуда не исчез и можно привести примеры, когда решение будет не то, которое ожидалось. Например, если точное значение одной из первых двух компонент вектора $U_A^{-1}L^{-1}f$ равно нулю, то ошибки округления могут существенно изменить решение. Но в том случае, который реализуется в большинстве случаев, а именно: получаемые вектора имеют вид

$$f = (f_1(1 + \varepsilon_1), f_2(1 + \varepsilon_2), f_3(1 + \varepsilon_3), f_4(1 + \varepsilon_4)),$$

где f_i - точное значение, а ε_i - малые ошибки, можно показать устойчивость всех алгоритмов по отношению таким малым возмущениям. Надо сказать, что при наших расчетах высших мод туннельных волн несколько раз алгоритм попадал на исключения и были найдены не те числа. Но это, вообще-то, единичные случаи и они легко обходятся. Правда, поначалу мы думали, что это связано с не очень корректным переходом от модифицированных функций Бесселя к обычным, когда аргумент переходит через ноль. Но эти утверждения о корректности всех действий, проводимых в программе, что они являются устойчивыми по отношению к возмущениям, описанным ранее, требуют значительно больших объемов текста и будут опубликованы отдельно.

Заключение

Был рассмотрен алгоритм процесс решения линейных систем уравнений с большими числами обусловленности определенного вида. Показано, что решение этих систем уравнений устойчиво по отношению к возмущениям наиболее часто встречающегося вида

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания, номер государственной регистрации 121052500138-4. (FWNZ-2021-0001)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гладырь А. В., Курсакин Г. А., Рассказов М. И., Константинов А. В. Разработка метода выделения опасных участков в массиве горных пород по данным сейсмоакустических наблюдений // ГИАБ. – 2019. – №. 8. – С. 21-32.
2. Jiao Y. Y. et al. Prediction of tunneling hazardous geological zones using the active seismic approach // Near Surface Geophysics. – 2015. – V. 13. – №. 4. – P. 333-342.
3. Xu X. et al. A case study of seismic forward prospecting based on the tunnel seismic while drilling and active seismic methods // Bulletin of Engineering Geology and the Environment. – 2021. – V. 80. – №. 5. – P. 3553-3567.
4. Курленя М. В., Сказка В. В., Азаров А. В., Сердюков А. С., Патутин А. В. Использование поверхностных волн для мониторинга состояния пород вокруг горных выработок и сооружений // ФТПРПИ. – 2022. – № 6. – С. 3–14.
5. Снеддон И., Бэрри Д. Классическая теория упругости. – М.: Физматгиз, 1961. – 220 с.
6. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Научная книга, 1977. – 390 с.
7. D. H. Bailey, R. Barrioand, J. M. Borwein. High precision computation: Mathematical physics and dynamics // Applied Mathematics and Computation. – 2012. –V. 218. – P. 10106-10121.
8. David H. Bailey, «MPFUN2020: A new thread-safe arbitrary precision package», <https://www.davidhbailey.com/dhbpapers/mpfun2020.pdf>
9. Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы. Построение и анализ. Второе издание. – М: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

© В. В. Сказка, А. В. Азаров, 2023