

А. А. Михайлов^{1}, Х. Х. Имомназаров¹, И. К. Искандаров², А. Т. Омонов³*

Моделирование распространения сейсмических волн процесса землетрясения

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

² Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация

³ Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Республика Узбекистан,

* e-mail: imom@omzg.sccc.ru

Аннотация. Рассматривается решение прямой динамической задачи теории упругости, которая моделирует формирование и распространение сейсмических волн от землетрясений, возникающих при тектонических процессах в нижних слоях земной коры. Поставленная задача записывается в виде динамических уравнений теории упругости в терминах компонент скоростей смещений и напряжений для двухмерной Декартовой системы координат. В настоящей статье рассматривается эффективный алгоритм решения данной прямой динамической задачи сейсмологии. Численное решение задачи основано на методе комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Интегральное преобразование Лагерра применяется по временной координате, аналогично спектральному преобразованию Фурье. Представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для реалистичной модели среды Байкальской рифтовой зоны. Анализируются сейсмические волновые поля, генерируемые в неоднородной упругой среде падающей волной из эпицентра землетрясения.

Ключевые слова: упругая среда, сейсмические волны, землетрясения, прямая задача, преобразование Лагерра, разностная схема

A. A. Mikhailov^{1}, Kh. Kh. Imomnazarov¹, I. K. Iskandarov², A. T. Omonov³*

Modeling the propagation of seismic waves of the earthquake process

¹ Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

² Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation

³ Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan

* e-mail: imom@omzg.sccc.ru

Abstract. The solution of the direct dynamic problem of elasticity theory, which models the formation and propagation of seismic waves from earthquakes occurring during tectonic processes in the lower layers of the Earth's crust, is considered. The problem is written in the form of dynamic equations of elasticity theory in terms of displacement and stress velocity components for a two-dimensional Cartesian coordinate system. In this article, an effective algorithm for solving this direct dynamic seismic problem is considered. The numerical solution of the problem is based on the method of integration of the analytical Laguerre transform and the finite difference method. The Laguerre integral transformation is applied along the time coordinate, similar to the spectral Fourier transform. Numerical results of modeling seismic wave fields for a realistic model of the environment of the Baikal rift zone are presented. Seismic wave fields generated in an inhomogeneous elastic medium by an incident wave from an earthquake epicenter are analyzed.

Keywords: elastic medium, longitudinal wave, earthquakes, direct problem, Laguerre transform, difference scheme

Введение

Сейсмические волны характеризуют не только очаг землетрясения, но и среду, через которую они распространяются, поэтому они являются основным носителем информации в сейсмологии. Самыми разрушительными являются поверхностные волны, так как они имеют низкую частоту, большую амплитуду и внушительное время действия.

В данной работе исследуются вопросы формирования сейсмических волновых полей от землетрясений, возникающих при тектонических процессах в нижних слоях земной коры. Численно решается прямая динамическая задача моделирования распространения сейсмических волн в упругой среде. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей смещений и тензора напряжений. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [1, 2]. Предлагаемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр m - степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость.

Постановка задачи

Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений в декартовой системе координат (x_1, x_2) .

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} + \delta_{ik} F_i f(t). \quad (2)$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ - упругие параметры среды, $\rho(x_1, x_2)$ - плотность среды, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ - вектор скорости смещений, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\vec{F}(x_1, x_2) = F_1 \vec{e}_x + F_2 \vec{e}_z$ описывает пространственное распределение источника, а $f(t)$ - заданный временной сигнал в источнике. Для точечного источника типа центр давления: $F_i = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0)$.

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i|_{t=0} = \sigma_{ij}|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

и граничных условиях на свободной поверхности $x_2 = 0$

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0. \quad (4)$$

Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)-(4) используем интегральное преобразование Лагерра по времени вида [1, 2]:

$$\bar{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} \bar{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^{\alpha}(ht) d(ht), \quad (5)$$

с формулой обращения

$$\bar{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \bar{W}_m(x_1, x_2) l_m^{\alpha}(ht), \quad (6)$$

где $l_m^{\alpha}(ht)$ - функции Лагерра.

После применения интегрального преобразования Лагерра по времени исходная задача (1)-(4) сводится к решению системы дифференциальных уравнений только по пространственным координатам (x_1, x_2) .

$$\frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}^m}{\partial x_k} = -h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \quad (7)$$

$$\frac{h}{2} \sigma_{ik}^m + \mu \left(\frac{\partial u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^m}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \bar{u}^m = \delta_{ik} F_i f^m - h \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_{ik}^n, \quad (8)$$

где $f^m = \int_0^{\infty} f(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^{\alpha}(ht) d(t)$.

Для дальнейшего решения задачи используется конечно-разностная аппроксимация производных на сдвинутых сетках [3] с четвертым порядком точности. Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$u_1(m) \in \omega x_1^i \times \omega x_2^j,$$

$$u_2(m) \in \omega x_1^{i+1/2} \times \omega x_2^{j+1/2},$$

$$\sigma_{11}(m), \sigma_{22}(m) \in \omega x_1^{i+1/2} \times \omega x_2^j,$$

$$\sigma_{12}(m) \in \omega x_1^i \times \omega x_2^{j+1/2}.$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомым вектор решения \vec{W} в следующем виде:

$$\vec{W}(m) = (\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_{K+N}(m))^T,$$

$$\vec{V}_{i+j} = (u_1^{i,j}, u_2^{i+1/2, j+1/2}, \sigma_{11}^{i+1/2, j}, \sigma_{22}^{i+1/2, j}, \sigma_{12}^{i, j+1/2})^T.$$

Тогда, полученная в результате система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как:

$$(A_\Delta + \frac{h}{2}E) \vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1).$$

Для решения данной системы линейных алгебраических уравнений применяется итерационный метод сопряженных градиентов. Преимуществом этого метода является быстрая сходимость к решению задачи, при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Получаемая в результате преобразования Лагерра матрица системы обладает этим свойством за счет введенного параметра сдвига h , располагаемой на главной диагонали.

Численное моделирование

Для численного моделирования распространения сейсмических волн, образованных в результате происшедшего землетрясения, была задана модель среды, описывающая байкальскую рифтовую зону. Модель среды изображена на рис. 1. На представленном рисунке изображены границы слоёв и подписаны значения скоростей продольных волн V_p в этих слоях. Значения скоростей поперечных волн задавались по формуле $V_s = V_p / \sqrt{3}$. Плотность рассчитывалась по известной формуле Гарднера $\rho = 1.74 * V_p^{0.25}$. Для воды – скорость продольной волны $V_p = 1480$ м/сек, плотность $\rho = 1.0$ г/см³. Генерация плоской продольной волны в эпицентре землетрясения в результате сдвига тектонических плит земной коры

задавалась с помощью задания пространственного распределения источника в уравнениях системы (2) в виде функции $F(x, z) = \delta(z - z_0) \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k)$, где N – количество узлов сетки по координате X , а z_0 – глубина формирования плоской волны. Значение глубины генерации плоской волны для численных расчетов волнового поля для представленных на рис. 2-4 было задано равным 45 км. На этих рисунках изображены мгновенные снимки волнового поля для u_z компоненты скорости смещений в моменты времени $T = 2, 6$ и 10 секунд. Временной сигнал в источниках задавался в виде:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 2$ Гц, $t_0 = 0.75$ сек.

Для численного решения поставленной задачи распространения сейсмических волн в упругой среде требуется введения ограниченной пространственной области модели среды. Основной проблемой при этом становится уменьшение до приемлемого уровня интенсивности отраженных волн, порожденных вводимыми фиктивными боковыми границами. В настоящее время одним из методов решения данной проблемы является окаймление расчетной области некоторым поглощающим слоем со специальным образом подобранными параметрами, введение которых не приводит к возникновению отражений (PML - perfectly matched layer) [4-6]. Данный подход эффективен для численного моделирования в сложно построенных упругих средах, особенно при использовании высокоточных конечно-разностных схем, так как не приводит к численной неустойчивости решения. Этот подход был первоначально предложен для численного моделирования электромагнитных волн, а затем использован и для расчетов упругих волновых полей [4,5]. Основным преимуществом этого подхода является тот факт, что ослабление волн внутри PML слоя происходит независимо от направления их распространения. Численные эксперименты с использованием этого подхода показали его высокую эффективность при толщине этих слоёв в 2 - 3 длины волны.

Из представленных на рис. 2-4 мгновенных снимках волнового поля видно, что при распространении плоской волны на границах раздела слоев формируются различные типы волн. Общая интерференционная волновая картина складывается в зависимости от геометрии этих границ и значения толщины слоев по сравнению с пространственной длиной волны. Поэтому видно отличие изображений волновых картин на рис. 4 и рис. 5, представленных для одинаковых моментов времени $T = 10$ секунд, но для разных частот сигнала в плоской волне $f_0 = 2$ Гц и $f_0 = 8$ Гц соответственно.

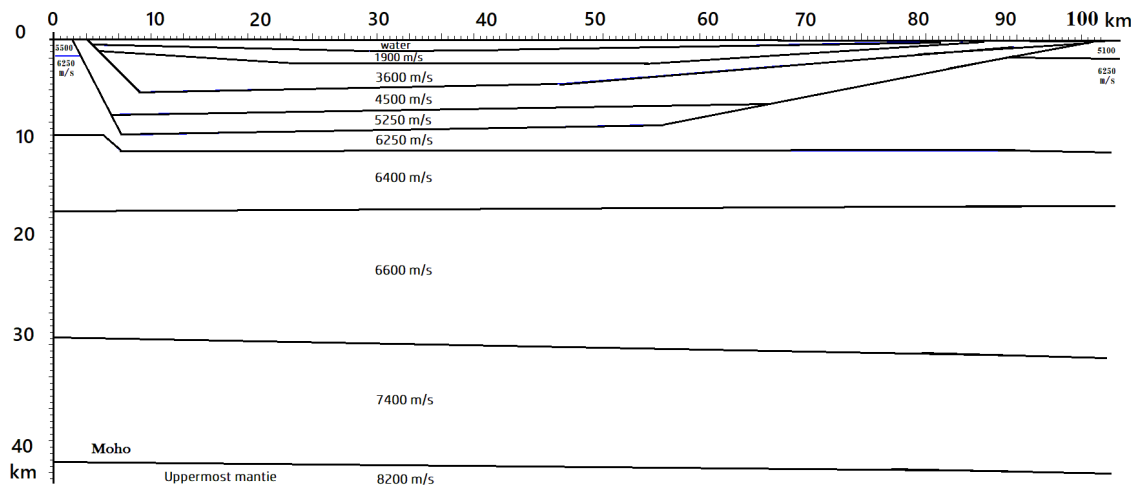


Рис. 1. Модель среды

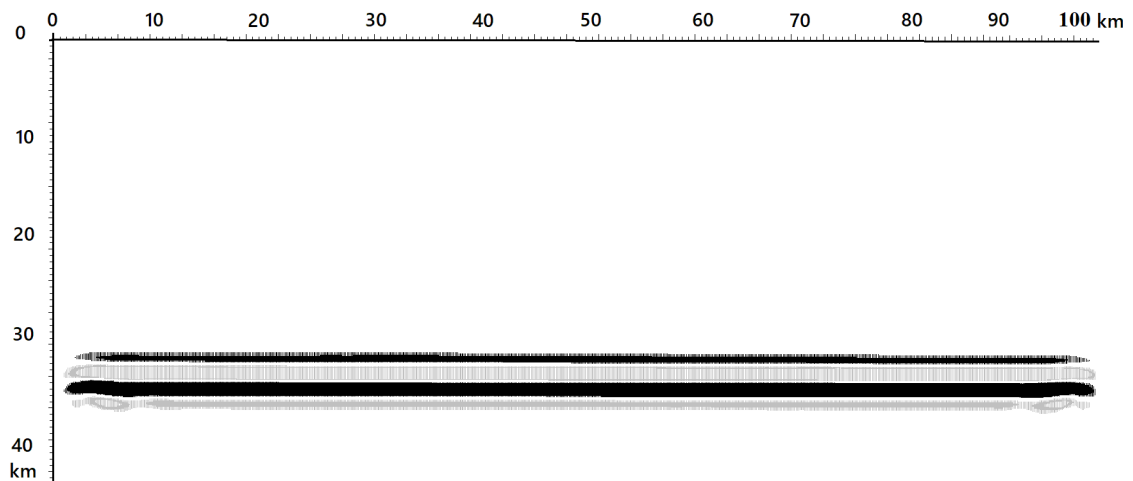


Рис. 2. Мгновенный снимок волнового поля U_z – компоненты для $T=2$ секунды

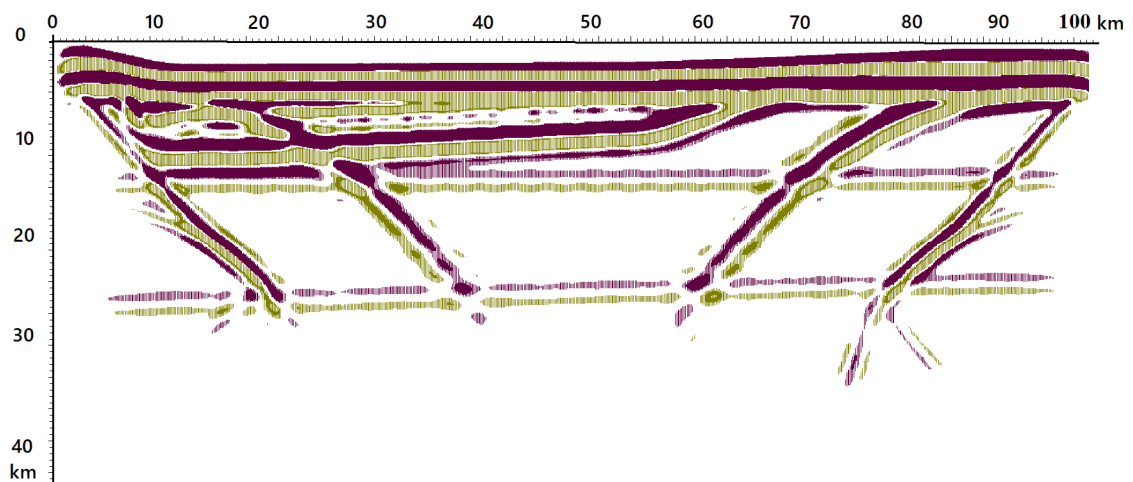


Рис. 3. Мгновенный снимок волнового поля U_z – компоненты для $T=6$ секунд

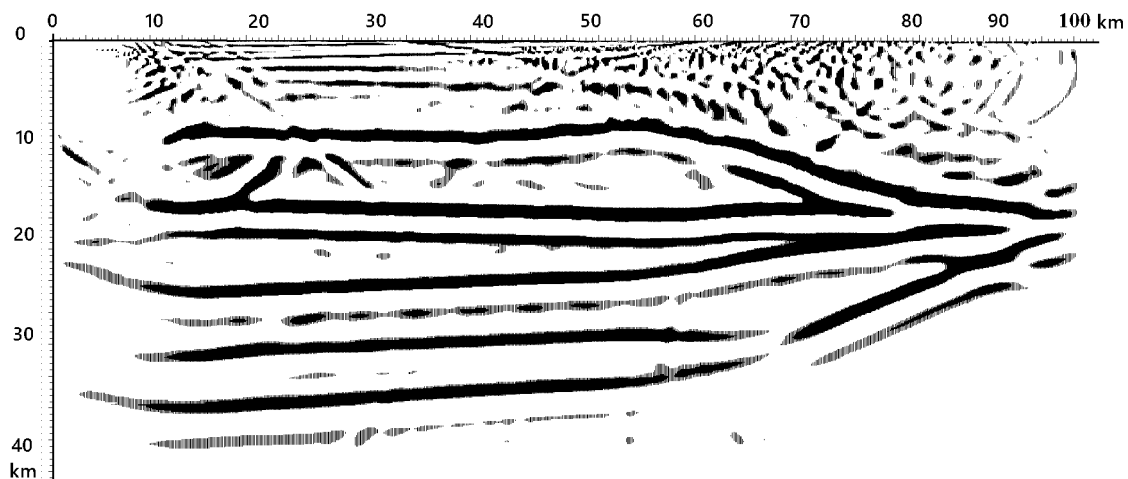


Рис. 4. Мгновенный снимок волнового поля U_z – компоненты для $T=10$ секунд

Из рассмотрения волнового поля на рис. 4 и рис. 5 видно, что в зависимости от геометрии границ может формироваться фокусировка различных волн на отдельных участках среды, приводящая к увеличению амплитуды упругих колебаний в этих местах.

На рис. 6 представлены вычисленные сейсмотрассы для U_z компоненты регистрируемые на свободной поверхности. Из данного рисунка видно, что наибольшая амплитуда у волны приходящей в первых вступлениях. Амплитуда и форма фронта этой волны заисит от геомтрии границ нижележащих слоев и контрастности их физических свойств.

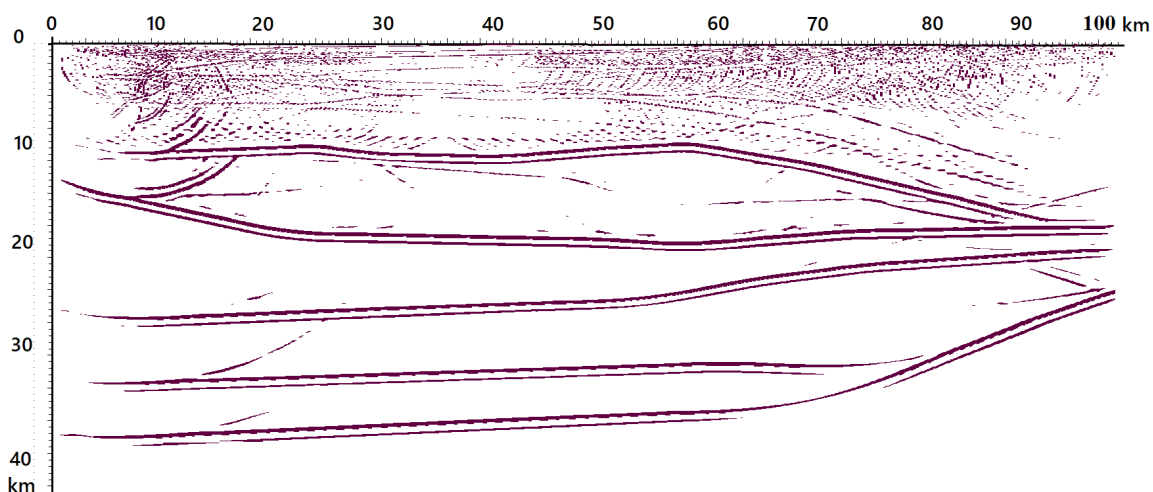


Рис. 5. Мгновенный снимок волнового поля U_z – компоненты в момент времени $T=10$ секунд для несущей частоты сигнала $f_0 = 8$ Гц

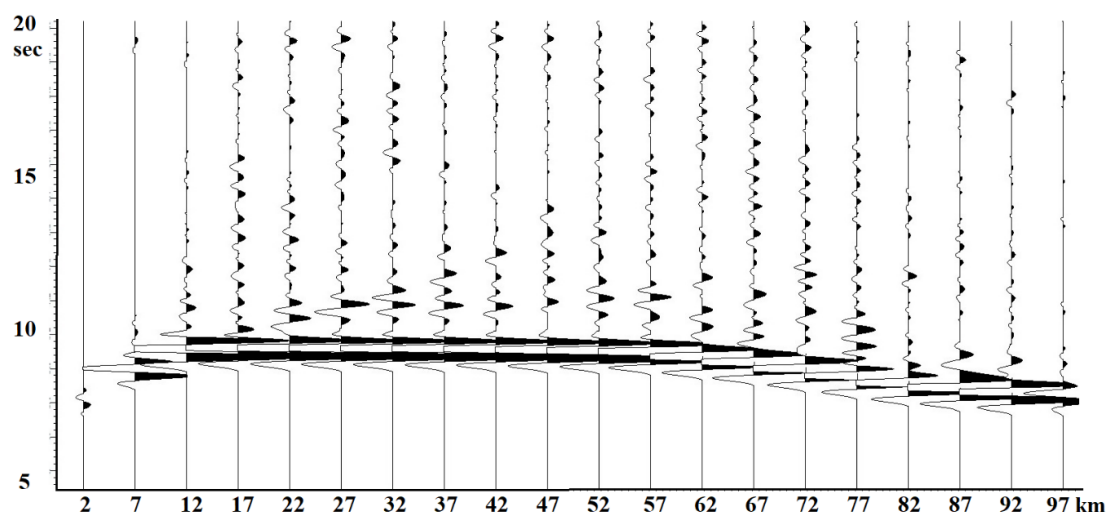


Рис. 6. Сеймотрассы для U_z компоненты регистрируемые на свободной поверхности

Заключение

Результаты численных расчётов показывают эффективность используемого алгоритма для решения поставленной задачи моделирования распространения сейсмических волн в сложнопостроенных неоднородных средах. Анализ полученных результатов расчёта волнового поля в таких средах, возбуждаемого распространением плоской волны сгенерированной в эпицентре землетрясения, показал возможность фокусировки энергии данных колебаний на определённых участках среды. Данный эффект, как видно из представленных результатов моделирования, зависит от геометрии строения среды и частоты распространяющихся в ней колебаний. Поэтому, этот факт следует учитывать при строительстве сооружений на поверхности, а также внутри среды и производить подобного рода численное моделирование. В дальнейших исследованиях предполагается изучить эффект возникновения резонанса собственных колебаний в данных сооружениях и внешних сейсмических колебаний возбуждаемых при землетрясениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Mikhailenko B. G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. – 1999. – № 12. – С. 105–110.
2. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. – 2001. – V. 9. – № 4, – P. 1523-1541.
3. Levander A. R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // Geophysics. – 1988. – V. 53. – P. 1425 – 1436.
4. Collino F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations // J. Comput. Phys. 1996. – V. 131(1). – P. 164–180.
5. Collino F., Tsogka C. Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. – 2001. – V. 66 (1). – P. 294 – 307.

© А. А. Михайлов, Х. Х. Имомназаров, И. К. Искандаров, А. Т. Омонов, 2023