УДК 517.95
DOI 10.33764/2618-981X-2023-4-1-82-88

Б. Х. Имомназаров[1], И. К. Искандаров[2], Д. А. Эркинова[3], Б. Б. Худайназаров[4]*

Исследование одной динамической системы, возникающей в двухжидкостной среде

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация
[2] Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация
[3] Каршинский государственный университет, г. Карши, Республика Узбекистан
[4] Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Аннотация. Получена система уравнений типа Хопфа, которая отличается от системы двухскоростной гидродинамики в диссипативном случае, обусловленной коэффициентом трения, отсутствием давления и условием несжимаемости. Показано, что полученная системы при исчезновении коэффициента трения переходит к скалярному уравнению Хопфа. Рассматривается задача Коши для одномерной однородной системы уравнений типа Хопфа, возникающая в двухжидкостной среде. Для данной задачи Коши не справедлива теорема о неявной функции в отличие от задачи Коши для скалярного уравнения Хопфа. Считается, что дисспация энергии происходит только за счет коэффициента трения (аналога Дарси) и данные Коши заданы в виде конечного тригонометрического ряда Фурье. Получены рекуррентные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд. Получено общее решение системы для второго приближения.

Ключевые слова: двухжидкостная среда, вязкость, коэффициент Дарси, прямая задача, ряд Фурье, относительный импульс

B. Kh. Imomnazarov[1], I. K. Iskandarov[2], D. A. Erkinova[3], B. B. Khudainazarov[4]*

Investigation of one dynamic system arising in a two-fluid medium

[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, the Russian Federation
[2] Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation
[3] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan
[4]Novosibirsk State University, the Russian Federation
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Abstract. A system of Hopf-type equations is obtained, which differs from the system of two-speed hydrodynamics in the dissipative case due to the coefficient of friction, the absence of pressure and the incompressibility condition. It is shown that the resulting system, when the coefficient of friction disappears, passes to the scalar Hopf equation. The Cauchy problem for a one-dimensional homogeneous system of Hopf-type equations arising in a two-fluid medium is considered. The implicit function theorem is not valid for this Cauchy problem, unlike the Cauchy problem for the scalar Hopf equation. It is believed that energy dissipation occurs only due to the coefficient of friction (the D'arcy analogue) and Cauchy data are given in the form of a finite trigonometric Fourier series. Recurrent systems of ordinary differential equations for amplitudes are obtained. A general solution of the system for the second approximation is obtained.

Keywords: two-fluid medium, viscosity, Darcy coefficient, direct problem, Fourier series, relative momentum

Введение

Гидродинамическая модель многофазной жидкости хорошо известна и подробно описана в учебниках и монографиях по механике сплошных сред [1-7]. Уравнение Хопфа из простейших гиперболических моделей, в которых задача Коши для уравнения Хопфа эквивалентна теорема о неявной функции. Это уравнение учитывает только адвективные процессы в модели. Если учитывать эффекты межфазного трения, то, как показано в двухжидкостной среде [8-23] возникает система гиперболического типа Хопфа. У системы уравнений двухскоростной гидродинамики и системы уравнений типа Хопфа много общего. Данная система учитывает следующие эффекты: наличие квадратичной нелинейности по скоростям подсистем, связаной с адвективными процессами и отвечающей зависимости скорости распространения звука от амплитуды звуковых волн, и наличие линейного по относительному импульсу диффузионного слагаемого в правых частях, связанного с процессами межфазного трения и отвечающего за затухание звуковых волн. Что касается свойств решений, то они совершенно разные. У системы уравнений типа Хопфа при исчезающем коэффициенте, аналоге коэффициента Дарси, формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решение системы двухскоростной гидродинамики такими особенностями не обладает. Однако область применимости этой системы отнюдь не ограничивается приведенными примерами, такие системы возникают во многих задачах, чем и определяется ее значение [24]. Поэтому особой ценностью обладают нелинейные модели, пусть и сильно упрощенные в сравнении с исходной системой двухскоростной гидродинамики, однако сохраняющие ее важные черты.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде, описываемый одномерной однородной системой уравнений [8, 9, 14, 15, 16, 22-24]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b(u - \tilde{u}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \varepsilon b(u - \tilde{u}), \tag{2}$$

где u и $\tilde{u}$ -- скорости подсистем с соответствующими парциальными плотностями ρ и $\tilde{\rho}$, b -- положительная постоянная отвечающая за трение в системе (аналог коэффициента Дарси), $\varepsilon = \frac{\rho}{\tilde{\rho}}$ -- безразмерная положительная постоянная.

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений типа Хопфа с периодическими начальными данными в виде тригонометрического многочлена [25]:

$$u|_{t=0} = \sum_{j=-N}^{N} \alpha_j\, e^{ijx}, \tag{3}$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \sum_{j=-N}^{N} \tilde{\alpha}_j \, e^{ijx} \tag{4}$$

Отметим, что при любой постоянной C решение $u(t,x)$ и $\tilde{u}(t,x)$ задачи Коши для системы (1), (2) можно заменить другим решением $U(t,x)$ и $\widetilde{U}(t,x)$ со сдвинутыми на C начальными данными:

$$U(t,x) = C + u(t, x + Ct), \qquad \widetilde{U}(t,x) = C + \tilde{u}(t, x + Ct).$$

Эти функции удовлетворяют системе (1), (2). Данная однопараметрическая группа симметрий позволяет выбрать $\alpha_0 = 0$ и $\tilde{\alpha}_0 = 0$ в начальных данных задачи (3), (4) и перейти от системы уравнений типа Хопфа к проинтегрированной системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} = -b(v - \tilde{v}), \qquad u = \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial x} = \varepsilon b(v - \tilde{v}), \qquad \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}. \tag{6}$$

Приближенное решение последней системы строится методом Галёркина [25]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v^2}{\partial x}\right\} = -b(v - \tilde{v}), \\ v(\tau, x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} a_n(\tau) e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} b_n(\tau) e^{-inx}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial x}\right\} = \varepsilon b(v - \tilde{v}), \\ \tilde{v}(\tau, x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \tilde{a}_n(\tau) e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \tilde{b}_n(\tau) e^{-inx}. \end{gathered} \tag{8}$$

Фигурные скобки обозначают здесь отбрасывание высших гармоник с номерами, большими N [25]. Приравнивание коэффициентов при e^{imx}, $|m| \le N$, в уравнениях для $v(\tau, x)$ и $\tilde{v}(\tau, x)$ приводит к замкнутой системе дифференциальных уравнений относительно $4N$ неизвестных функций $a_n(\tau)$, $\tilde{a}_n(\tau)$ и $b_n(\tau)$, $\tilde{b}_n(\tau)$:

$$\begin{gathered} a'_n(\tau) = f_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - b(a_n - \tilde{a}_n), \\ b'_n(\tau) = g_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - b(b_n - \tilde{b}_n), \qquad n = 1, \dots, N, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \tilde{a}'_n(\tau) = \tilde{f}_n(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) + \varepsilon b(a_n - \tilde{a}_n), \\ \tilde{b}'_n(\tau) = \tilde{g}_n(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) + \varepsilon b(b_n - \tilde{b}_n), \qquad n = 1, \dots, N, \end{gathered} \tag{10}$$

где штрих – это дифференцирование по времени, которое мы обозначаем через τ.

Начальные данные для динамической системы (9), (10) в силу соотношения $u = \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$ задаются в виде

$$a_n(0) = -i\alpha_n, \quad b_n(0) = i\alpha_{-n}, \qquad n = 1, \dots, N,$$
$$\tilde{a}_n(0) = -i\tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{b}_n(0) = i\tilde{\alpha}_{-n}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

Для вещественных решений должно выполняться условия $\bar{a}_n = b_n$ и $\bar{\tilde{a}}_n = \tilde{b}_n$.

В динамической системе (9), (10) функции $f_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\tilde{f}_n(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}})$ и $g_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\tilde{g}_n(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}})$ являются однородными квадратичными многочленами своих аргументов. В качестве иллюстрации приведем вид функции $\tilde{f}_n(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}})$ в зависимости от четности числа N:

$$\tilde{f}_N = \begin{cases} -N(\tilde{a}_1\tilde{a}_{N-1} + \tilde{a}_2\tilde{a}_{N-2} + \dots + \tilde{a}_m\tilde{a}_{m+1}), & N = 2m + 1, \\ -N(\tilde{a}_1\tilde{a}_{N-1} + \tilde{a}_2\tilde{a}_{N-2} + \dots + \tilde{a}_{m-1}\tilde{a}_{m+1}) - m\tilde{a}_m^2, & N = 2m. \end{cases}$$

В частности, при $N = 5$ динамическая система (9), (10) имеет следующий вид:

$$a'_1 = b_1a_2 + b_2a_3 + b_3a_4 + b_4a_5 - b(a_1 - \tilde{a}_1), \tag{11}$$
$$b'_1 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_5 - b(b_1 - \tilde{b}_1), \tag{12}$$
$$a'_2 = 2(b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_5) - a_1^2 - b(a_2 - \tilde{a}_2), \tag{13}$$
$$b'_2 = 2(a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_5) - b_1^2 - b(b_2 - \tilde{b}_2), \tag{14}$$
$$a'_3 = 3(b_1a_4 + b_2a_5) - 3a_1a_2 - b(a_3 - \tilde{a}_3), \tag{15}$$
$$b'_3 = 3(a_1b_4 + a_2b_5) - 3b_1b_2 - b(b_3 - \tilde{b}_3), \tag{16}$$
$$a'_4 = 4b_1a_5 - 4a_1a_3 - 2a_2^2 - b(a_4 - \tilde{a}_4), \tag{17}$$
$$b'_4 = 4a_1b_5 - 4b_1b_3 - 2b_2^2 - b(b_4 - \tilde{b}_4), \tag{18}$$
$$a'_5 = -5(a_1a_4 + a_2a_3) - b(a_5 - \tilde{a}_5), \tag{19}$$
$$b'_5 = -5(b_1b_4 + b_2b_3) - b(b_5 - \tilde{b}_5), \tag{20}$$
$$\tilde{a}'_1 = \tilde{b}_1\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2\tilde{a}_3 + \tilde{b}_3\tilde{a}_4 + \tilde{b}_4\tilde{a}_5 + \varepsilon b(a_1 - \tilde{a}_1), \tag{21}$$
$$\tilde{b}'_1 = \tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_3 + \tilde{a}_3\tilde{b}_4 + \tilde{a}_4\tilde{b}_5 + \varepsilon b(b_1 - \tilde{b}_1), \tag{22}$$
$$\tilde{a}'_2 = 2(\tilde{b}_1\tilde{a}_3 + \tilde{b}_2\tilde{a}_4 + \tilde{b}_3\tilde{a}_5) - \tilde{a}_1^2 + \varepsilon b(a_2 - \tilde{a}_2), \tag{23}$$
$$\tilde{b}'_2 = 2(\tilde{a}_1\tilde{b}_3 + \tilde{a}_2\tilde{b}_4 + \tilde{a}_3\tilde{b}_5) - \tilde{b}_1^2 + \varepsilon b(b_2 - \tilde{b}_2), \tag{24}$$
$$\tilde{a}'_3 = 3(\tilde{b}_1\tilde{a}_4 + \tilde{b}_2\tilde{a}_5) - 3\tilde{a}_1\tilde{a}_2 + \varepsilon b(a_3 - \tilde{a}_3), \tag{25}$$
$$\tilde{b}'_3 = 3(\tilde{a}_1\tilde{b}_4 + \tilde{a}_2\tilde{b}_5) - 3\tilde{b}_1\tilde{b}_2 + \varepsilon b(b_3 - \tilde{b}_3), \tag{26}$$
$$\tilde{a}'_4 = 4\tilde{b}_1\tilde{a}_5 - 4\tilde{a}_1\tilde{a}_3 - 2\tilde{a}_2^2 + \varepsilon b(a_4 - \tilde{a}_4), \tag{27}$$
$$\tilde{b}'_4 = 4\tilde{a}_1\tilde{b}_5 - 4\tilde{b}_1\tilde{b}_3 - 2\tilde{b}_2^2 + \varepsilon b(b_4 - \tilde{b}_4), \tag{28}$$
$$\tilde{a}'_5 = -5(\tilde{a}_1\tilde{a}_4 + \tilde{a}_2\tilde{a}_3) + \varepsilon b(a_5 - \tilde{a}_5), \tag{29}$$
$$\tilde{b}'_5 = -5(\tilde{b}_1\tilde{b}_4 + \tilde{b}_2\tilde{b}_3) + \varepsilon b(b_5 - \tilde{b}_5), \tag{30}$$

Легко видеть, что динамическая система (9), (10) допускает редукцию$b_n = a_n$, $\tilde{b}_n = \tilde{a}_n$, которую в дальнейшем следуя [25] мы называем *главной*. Эта редукция соответствует нечетным по переменной x решениям системы уравнений (1), (2) и начальным данным вида

$$a_n(0) = -i\alpha_n, \quad b_n(0) = i\alpha_{-n} = -i\alpha_n, \qquad n = 1, \dots, N, \tag{31}$$
$$\tilde{a}_n(0) = -i\tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{b}_n(0) = i\tilde{\alpha}_{-n} = -i\tilde{\alpha}_n, \qquad n = 1, \dots, N. \tag{32}$$

Как замечено в [25], главная редукция позволяет, приближенные решения системы уравнений типа Хопфа, удовлетворять дополнительным нулевым краевым условиям Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b(u - \tilde{u}), \qquad 0 \le x \le 2\pi, \tag{33}$$
$$u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0, \quad \forall t,$$
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \varepsilon b(u - \tilde{u}), \qquad 0 \le x \le 2\pi, \tag{34}$$
$$\tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 2\pi) = 0, \quad \forall t.$$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании системы уравнений типа Хопфа. Аналогом частного решения системы уравнений типа Хопфа является следующее решение уравнения (7), (8) при $N = 2$:

$$\begin{gathered}
a'_1 = b_1 a_2 - b(a_1 - \tilde{a}_1), \\
b'_1 = a_1 b_2 - b(b_1 - \tilde{b}_1), \\
a'_2 = -a_1^2 - b(a_2 - \tilde{a}_2), \\
b'_2 = -b_1^2 - b(b_2 - \tilde{b}_2), \\
\tilde{a}'_1 = \tilde{b}_1 \tilde{a}_2 + \varepsilon b(a_1 - \tilde{a}_1), \\
\tilde{b}'_1 = \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 + \varepsilon b(b_1 - \tilde{b}_1), \\
\tilde{a}'_2 = -\tilde{a}_1^2 + \varepsilon b(a_2 - \tilde{a}_2), \\
\tilde{b}'_2 = -\tilde{b}_1^2 + \varepsilon b(b_2 - \tilde{b}_2).
\end{gathered} \tag{35}$$

Полученная система является более общий чем полученной системы в [25]. Также как в [25] система (11)-(30) является нелинейнной. В данной работе построено частное решение динамической системы (35):

$$a_1 = \tilde{a}_1 = b_1 = \tilde{b}_1 = 0,$$
$$a_2 = \frac{c_2 + c_1 e^{-(1+\varepsilon)b\tau}}{1+\varepsilon}, \qquad \tilde{a}_2 = \frac{c_2 - \varepsilon c_1 e^{-(1+\varepsilon)b\tau}}{1+\varepsilon},$$
$$b_2 = \frac{c_4 + c_3 e^{-(1+\varepsilon)b\tau}}{1+\varepsilon}, \qquad \tilde{b}_2 = \frac{c_4 - \varepsilon c_3 e^{-(1+\varepsilon)b\tau}}{1+\varepsilon}.$$

Заключение

Таким образом, получена система уравнений типа Хопфа, отличающаяся от системы двухскоростной гидродинамики в диссипативном случае, обусловленным коэффициентом трения, отсутствием давления и условием несжимаемости. Показано, что полученная система при исчезновении коэффициента трения переходит к скалярному уравнению Хопфа. Рассматривается задача Коши для одномерной однородной системы уравнений типа Хопфа возникающая в двухжидкостной среде. Для данной задачи Коши не справедлива теорема о неявной функции в отличие от задачи Коши для скалярного уравнения Хопфа. Считается, что дисспация энергии происходит только за счет коэффициента трения (аналога Дарси) и данные Коши заданы в виде конечного тригонометрического ряда Фурье. Получены рекуррентные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд. Получено общее решение системы для второго приближения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
2. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 2. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
3. Доровский В. Н., Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформи-руемых средах // ФГВ. – 1993. – № 1. – С.100-111.
4. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. - New York: Nova Science Publishers Inc.,1995. – 192p.
5. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. – 2001. – Т. IV. – №2(8). – С.154-165.
6. Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. – Ташкент: Изд. Университет, 2017. – 120с.
7. Имомназаров Х. Х., Янгибоев З. Ш. Прямые и обратные задачи для систем уравнений гиперболического типа, Основные понятия, методы решения, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2022. – 169с.
8. Vasiliev G. S., Imomnazarov Kh. Kh., Mamasoliyev B. J. On one system of the Burgers equations arising in the two-velocity hydrodynamics // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). – 2016. – V. 697. P. 012024.
9. Vasiliev G., Imomnazarov Kh., Kalimoldayev M., Mamasoliyev B. J. Cauchy Problem for System of the Burgers Equations Arising in the Two-velocity Hydrodynamics // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. – Vol. 12. – No. 3. – P. 134-138.
10. Васильев Г. С., Жиан-Ган Тан, Мамасолиев Б. Ж. Инвариантные подмодели системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению // СЭМИ. – 2018. – Т. 15. – С. 585-602.
11. Imomnazarov Sh., Imomnazarov Kh., Kholmurodov A., Dilmuradov N., Mamatkulov M. On a Problem Arising in a Two-Fluid Medium // International Journal of Mathematical Analysis and Ap-plications. – 2018. – N 5(4). – P. 95-100.
12. Имомназаров Х. Х., Турдиев У. К. Исследование задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса методом слабой аппроксимации // Проблемы информатики. – 2019. – N 3. – С. 20-30.
13. Ulugbek Turdiyev and Kholmatzhon Imomnazarov A system of equations of the two-velocity hy-drodynamics without pressure // AIP Conference Proceedings. 2021. – 2365. – 070002.
14. Эркинова Д. А., Имомназаров Б. Х., Имомназаров Х. Х. Одномерная система уравнений типа Хопфа // Региональная научно-практ. конф. «ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых», 12-16 апреля 2021 г., Хабаровск. – С. 61-69.
15. Эркинова Д. А., Имомназаров Б. Х., Имомназаров Х. Х. Задача коши для одномерной системы уравнений типа хопфа // Республика конференцияси «Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари» 1-2 июнь 2021 й. – Т. 1. – С. 412-416.
16. Имомназаров Б. Х., Эркинова Д. А., Имомназаров Х. Х. Задача Коши для одной квазилинейной системы // Тезисы докладов респ. научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения», 16-18 сентября 2021 г., г. Ташкент. – С. 66-67.

17. Имомназаров Х. Х., Мукимов А. Х., Салаев Д. К. Одномерная обратная задача для системы уравнений типа Хопфа // Материалы межд. научно-практич. конфер. «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий», 11-12 мая, 2022 г. Бухара. – С. 209-210.

18. Имомназаров Х. Х., Искандаров И. К., Куйлиев С. Б., Урев М. В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной гидродинамике // Математические заметки СВФУ. – 2022. – Т. 29. – N 1. – С. 14-24.

19. Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении // СибЖИМ. – 2022. – Т. 25. – N 3. – С. 33-40.

20. Имомназаров Х. Х. Об одной краевой задаче, возникающей в двухжидкостной среде // Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», 06 – 08 октября 2022 года г. Ташкент. – С. 22-23.

21. Vasiliev S. G, Imomnazarov Kh. Kh., Mamasoliev B. J. Studing a nondissipative system of the twovelocity hydrodynamics // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international conference «Computational models and technologies», September 16-17, 2022, Tashkent, Uzbekistan. – P. 125.

22. Имомназаров Б. Х., Салаев Д. К., Искандаров И. К. Задача Коши одномерной системы уравнений типа Хопфа // Региональная научно-практ. конф. «ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых», 12-16 апреля 2022 г., Хабаровск. – С. 9-16.

23. Имомназаров Б. Х., Салаев Д. К., Искандаров И. К. Об одной обратной задаче для одномерной системы уравнений типа Хопфа // Far East Math: материалы национальной научной конференции, 2022 г., Хабаровск. – С. 3-10.

24. Imomnazarov B. Kh., Turdiev U. K., Erkinova D. A. Weak approximation method for the Cauchy problem for a one-dimensional system of Hopf-type equations // Mathematical Notes of NEFU. – 2022. – V. 29(4). – P. 11–20.

25. Шабат А. Б. О периодических решениях уравнений Хопфа // ТМФ. – 2013. – Т. 177. – N 2. – С. 222-230.