УДК 517.95
DOI 10.33764/2618-981X-2023-4-1-77-81

Х. Х. Имомназаров[1], И.К. Искандаров[2], А. М. Рахимов[3], Б. Б. Худайназаров[4]*

Исследование одномерной задачи Коши для динамической системы пороупругости

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация
[2] Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация
[3] Каршинский государственный университет, г. Карши, Республика Узбекистан
[4] Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Аннотация. Получена одномерная система дифференциальных уравнений описывающая распространение сейсмических волн в насыщенной жидкости пористых сред. Данная система является гиперболической которая описывает распространение быстрой и медленной волны в пористой среде. Рассматривается задача Коши для одномерной однородной системы уравнений пороупругости описываемая тремя упругими параметрами в обратимом гидродинамическом приближении. Показано, что решение данной задачи Коши сводится к решению задачу Коши для системы одномерных волновых уравнений. Получены формулы решения задачи Коши в виде формулы Даламбера. Показано влияние коэффициента пористости на распространению сейсмических волн, а также других трех упругих коэффициентов и двух физических плотностей насыщающей жидкости и упругого пористого тела, соответственно.Полученные результаты свидетельствуют о необходимости учета гидродинамических эффектов, связанных с возникновением фильтрационных перетоков на границах неоднородностей, при изучении распространения упругих волн в насыщенных пористых средах.

Ключевые слова: пористая среда, задача Коши, формула Даламбера, прямая задача, медленная волна, пористость

Kh. Kh. Imomnazaro[1], I. K. Iskandarov[2], A. M. Rakhimov[3], B. B. Khudainazarov[4]*

Investigation of the one-dimensional Cauchy problem for a dynamic poroelasticity System

[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, the Russian Federation
[2] Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation
[3] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan
[4] Novosibirsk State University, the Russian Federation
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Abstract. A one-dimensional system of differential equations is obtained that describes the propagation of seismic waves in a saturated liquid of porous media. This system is hyperbolic, which describes the propagation of fast and slow waves in a porous medium. The Cauchy problem for a one-dimensional homogeneous system of poroelasticity equations described by three elastic parameters in a reversible hydrodynamic approximation is considered. It is shown that the solution of this Cauchy problem is reduced to solving the Cauchy problem for a system of one-dimensional wave equations. Formulas for solving the Cauchy problem in the form of the d'Alembert formula are obtained. The influence of the porosity coefficient on the propagation of seismic waves, as well as the other three

elastic coefficients and two physical densities of the saturating fluid and the elastic porous body, respectively, when studying the propagation of elastic waves in saturated porous media is shown.

Keywords: porous medium, Cauchy problem, d'Alembert formula, direct problem, slow wave, porosity

Введение

В прикладных задачах теории распространения упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются и в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны для прогноза землетрясений [1-3].

В геофизике динамические и кинематические характеристики упругих волн, распространяющихся в фрагментированных флюидонасыщенных горных породах, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, они также содержат сведения о литологии пород и характере их границ, трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений, а также о составе и фазовом состоянии флюидов-заполнителей порового пространства коллекторов. Математические модели в теории волн дают инструмент для определения численных значений скоростей распространения и коэффициентов поглощения упругих сейсмических волн в зависимости от вещественного состава флюидозаполненного коллектора, его строения и влияния окружающей среды. Определяемые значения скорости распространения и коэффициента поглощения упругих сейсмических волн тем точнее, чем реалистичнее и адекватнее математическая модель.

Выявленные особенности поглощения сейсмических волн в трещиновато-пористых средах с одновременным проявлением множественных электросейсмических эффектов не удается согласовать с простейшими моделями идеально упругой изотропной среды и среды Био. Реальные геологические среды являются многофазными, электропроводящими, трещиноватыми, пористыми и т. д [4-11]. Поэтому особой ценностью обладают формулы решения задач пороупругости которые которые указывает зависимость от праметра пористости.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волн в пористой среде, описываемый одномерной однородной системой уравнений [8, 9, 13-18]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

где u_1и u_2 -- скорости упругого пористого тела и насыщающей жидкости с соответствующими парциальными плотностями $\rho_s = \rho_s^f(1-d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$, ρ_s^f и

ρ_l^f -- физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно, d_0 -- пористость,

$$a_{11} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_s} + \left(\rho\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho^2}\right)\rho_s - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho},$$
$$a_{12} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho^2} - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho_s}\right)\frac{\rho_l}{\rho},$$
$$a_{21} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho} - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho},$$
$$a_{22} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho}, \qquad \rho = \rho_l + \rho_s,$$

α_3, λ, μ -- упругие параметры пористой среды.
Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений пороупругости (1), (2) со следующими данными Коши [18]:

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x) \tag{3}$$
$$u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2(x) \tag{4}$$

Решая задачу Коши (1)-(4) методом характеристик, после несложных преобразований получим аналог формулы Даламбера для системы уравнений пороупругости:

$$\begin{gathered}
u_1(t,x) = \frac{c_1^2 - a_{22}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_1(x + c_1 t) + \varphi_1(x - c_1 t) + \frac{1}{c_1}\int_{x-c_1 t}^{x+c_1 t}\psi_1(\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{(c_1^2 - a_{22})(c_2^2 - a_{22})}{2a_{21}(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_2(x + c_1 t) + \varphi_2(x - c_1 t) - \frac{1}{c_1}\int_{x-c_1 t}^{x+c_1 t}\psi_2(\xi)d\xi\right] + \\
+\frac{(c_1^2 - a_{22})(c_2^2 - a_{22})}{2a_{21}(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_2(x + c_2 t) + \varphi_2(x - c_2 t) + \frac{1}{c_2}\int_{x-c_2 t}^{x+c_2 t}\psi_2(\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{c_2^2 - a_{22}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_1(x + c_2 t) + \varphi_1(x - c_2 t) + \frac{1}{c_2}\int_{x-c_2 t}^{x+c_2 t}\psi_1(\xi)d\xi\right],
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
u_2(t,x) = \frac{a_{21}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_1(x + c_1 t) + \varphi_1(x - c_1 t) + \frac{1}{c_1}\int_{x-c_1 t}^{x+c_1 t}\psi_1(\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{c_2^2 - a_{22}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_2(x + c_1 t) + \varphi_2(x - c_1 t) - \frac{1}{c_1}\int_{x-c_1 t}^{x+c_1 t}\psi_2(\xi)d\xi\right] + \\
+\frac{c_1^2 - a_{22}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_2(x + c_2 t) + \varphi_2(x - c_2 t) + \frac{1}{c_2}\int_{x-c_2 t}^{x+c_2 t}\psi_2(\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{a_{21}}{2(c_1^2 - c_2^2)}\left[\varphi_1(x + c_2 t) + \varphi_1(x - c_2 t) + \frac{1}{c_2}\int_{x-c_2 t}^{x+c_2 t}\psi_1(\xi)d\xi\right].
\end{gathered} \tag{6}$$

В формулах (5) и (6) c_1 и c_2 -- скорости быстрой и медленной продольной волны [8]:

$$c_1^2 = B_*\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}}\right), \qquad c_2^2 = B_*\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}}\right),$$

$$B_* = \frac{\alpha_3\rho^2}{2} + \frac{\lambda+2\mu/3}{2\rho}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\frac{2}{3}\mu}\frac{\rho}{\rho_s} - 1\right),$$

$$b_* = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho}\right)\left[\frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}\left(1 - \frac{\lambda+\frac{2}{3}\mu}{\lambda+2\mu}\right) + \alpha_3\rho^2\right].$$

Полученные формулы позволяют при тестировании численных схем для моделирования задач рас-ространение сейсмичечких волн в насыщенной жидкостью пористой среде. Эти формулы можно использовать как при заданных распределениях упругих параметров пористой среды так и при заданных распределениях скоростей быстрой и медленной продольных волн.

Заключение

Многие породы являются сложным для изучения объектом, причем эта сложность во многом обусловлена наличием трещиноватости и пористости. В нашей работе в рамках континуальной теории фильтрации рассмотрено распространение сейсмических продольных волн в горной породе, содержащей параметры флюидонасыщенности и пористости. Рассматривается задача Коши для одномерной однородной системы уравнений пороупругости описываемая тремя упругими параметрами в обратимом гидродинамическом приближении. Показано, что решение данной задачи Коши сводится к решению задачи Коши для системы одномерных волновых уравнений. Получены формулы решения задачи Коши в виде формулы Даламбера. Показано влияние коэффициента пористости на распространение сейсмических волн, а также других трех упругих коэффициентов и двух физических плотностей насыщающей жидкости и упругого пористого тела, соответственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев А. С., Имомназаров Х. Х., Грачев Е. В., Рахмонов Т. Т., Имомназаров Б. Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб.ЖИМ. – 2004. – Т.7. – №1. – С. 3–8.

2. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. – 2001. – Т.IV. –№2(8). – С.154–165.

3. Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Ташкент: Изд. Университет. – 2017. – 120с.

4. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. – 1944. – Т. 8. – № 4. –С. 133–150.

5. 15. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range // J. Acoustic. Soc. America. – 1956. – V. 28. – N 2. – P. 168–178.

6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 1. - М: Наука, 1987. – 464 с.

7. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 2. - М: Наука, 1987. – 360 с.

8. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // ФГВ. – 1993. – № 1. – С.100–111.

9. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. - New York: Nova Science Publishers Inc., 1995. –- 192p.

10. Имомназаров Х. Х., Янгибоев З. Ш. Прямые и обратные задачи для систем уравнений гиперболического типа, Основные понятия, методы решения, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2022. – 169с.

11. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 339 с.

12. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. – 1989. – № 7. – С. 39–45.

13. Имомназаров Х. Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. – 2000. –Т. 373. – N 4. – С.536–537.

14. Imomnazarov Kh. Kh. Some remarks on the Biot system of equations de-scribing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. – 2000. – V. 13. – N 3. – P. 33–35.

15. Имомназаров Х. Х. Фундаментальное решение системы уравнений двухскоростной гидродинамики // Доклады РАН. – 1996. – Т.346. – N 1. – С. 26–27.

16. Имомназаров Х. Х. Единственность определения источника в задаче Коши для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Доклады РАН. –1998. – Т.360. – N 1. – С. 111–113.

17. Imomnazarov Kh. Kh. Uniqueness of Determination of a Sourse in the Cauchy Problem for the System of Equations of Continual Filtration Theory // Appl. Math. Lett. – 1998. – V. 11. N 2. – P. 75–79.

18. Имомназаров Х. Х. Фундаментальные решение системы уравнения континуальной теории фильтрации для неоднородной среды // Доклады РАН. – 1996. – Т.347. – N 2. – С.242–245.