

Е. Б. Сибиряков^{1,2}

Использование метода граничных элементов с гладкими ядрами для решения граничных задач упругих стационарных колебаний

- ¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
² Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В работе представлен новый метод решения краевых задач упругих стационарных колебаний. Краевая задача сводится к системе интегральных уравнений с гладкими ядрами. Спектральное разложение этих ядер приводит к системе линейных уравнений с низким числом обусловленности. Таким образом, новый метод решения позволяет находить решения краевых задач, в том числе смешанного типа, с высокой точностью и достоверностью.

Ключевые слова: краевые задачи, граничные интегральные уравнения, отражение от границы раздела

Е. В. Sibiriakov^{1,2}

The using of boundary element method with smooth kernels for the elastic stationary oscillations boundary value problems

- ¹ IPGG SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
² SibSUTIS, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

Abstract. A new method for solving of elastic stationary oscillations boundary value problems is presented. The boundary value problem is reduced to a system of integral equations with smooth kernels. The spectral decomposition of these kernels gives a system of linear equations with a low condition number. Thus, the new method gives a possibility to find solutions of boundary value problems, including those of a mixed type, with high accuracy and reliability.

Keywords: boundary value problems, boundary integral equations, reflection from the interface

Введение

Решение прямых краевых задач упругих стационарных колебаний используется для нахождения решений коэффициентных обратных задач как в геофизике, так и в задачах. Обычно прямые задачи решаются либо методом конечных элементов (МКЭ), либо с использованием разностных схем. Главным достоинством МКЭ является минимальное расходование вычислительных ресурсов из-за использования упрощённых алгоритмов обращения разреженной матрицы. Однако, его недостатки являются продолжениями его же достоинств. Фактическое проведение границ там, где их на самом деле нет, редко остаётся без последствий. Ухудшение обусловленности при увеличении количества узлов в сетке порождает необходимость использования регуляризационных процедур при ис-

пользовании этого метода [1]. Это приводит к мысли, что было бы очень желательно иметь возможность использовать альтернативные методы решения некоторых видов упругих задач. Главным преимуществом метода граничных интегральных уравнений является лучшая обусловленность системы линейных уравнений, к решению которой сводится краевая задача.

Суть метода в том, что решение краевой задачи ищется в виде свёртки ядра, обеспечивающего удовлетворение уравнению в фиксированной точке пространства (в том числе и на поверхности) с вектором потенциала, который находится таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Например, в двухмерном случае решение системы уравнений упругих стационарных колебаний ищется в виде интегралов по всем границам разделов:

$$U_i(x_0, z_0) = \int G_{ikU}(x_0 - x, z_0 - z) f_{kU}(x, z) dl \quad (1),$$

либо

$$p_i(x_0, z_0) = \int G_{ikP}(x_0 - x, z_0 - z) f_{kP}(x, z) dl \quad (2),$$

где x_0, z_0 - координаты фиксированной точки пространства, включая границу раздела, x, z - координаты бегущей точки границы раздела, $f_{kU}(x, z)$ и $f_{kP}(x, z)$ - компоненты векторов, которые вычисляются так, чтобы удовлетворялись граничные условия, $G_{ikU}(x_0 - x, z_0 - z)$ и $G_{ikP}(x_0 - x, z_0 - z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям упругости в фиксированной точке. Если на верхней границе раздела заданы перемещения, то следует искать решения уравнений (1), если заданы нагрузки, то (2) (задачи первого и второго типа). Кроме того, на всех прочих границах раздела следует удовлетворить условиям по перемещениям и нагрузкам (задача смешанного типа). При этом, если поверхность раздела плоская (прямая линия), то координаты бегущих и фиксированных совпадают с декартовыми. В случае криволинейных границ раздела эти координаты есть проекции радиус-вектора, направленного из фиксированной точки в бегущую, на нормаль и касательную к линии раздела. Если в качестве компонент тензоров $G_{ikU}(x, z)$ выбрать тензор Грина для двумерного полупространства, аналогично изложенному в [2, 3] для решения статических и динамических задач, и сосредоточенный поверхностный источник нагрузки (на плоской границе - дельта-нагрузка, приложенная либо по нормали, либо по касательной) соответственно, то на произвольной криволинейной границе раздела в уравнениях (1) возникнет интегрируемая особенность, а в системе (2) ещё и дельта-функция. Если в уравнениях (1, 2) выколоть особенность аналитически, то при вычислении интегралов нельзя будет использовать формулы интегрирования повышенной точности, поскольку интеграл от сингулярности вычисляется приближённо. Кроме того, при решении задач первого типа обусловленность будет хуже, чем

при решении задач второго типа. Это приводит к мысли о желательности усовершенствовать метод граничных интегральных уравнений с помощью использования новых ядер в уравнениях (1, 2).

Метод решения

В [4] для решения краевых задач упругих стационарных колебаний было предложено использовать в качестве ядер отклик не на классическую сосредоточенную нагрузку, а на её конечный аналог. Усовершенствование алгоритма, изложенного в той работе будет заключаться в использовании разных ядер для задач первого и второго типа, использовании иного конечного аналога дельта-функции и в ином методе решения интегральных уравнений.

Запишем двумерные уравнения упругих стационарных колебаний в виде:

$$\begin{aligned} U_{z,zz} + \gamma^2 U_{z,xx} + \gamma^2 k^2 U_z + (1 - \gamma^2) U_{x,zx} &= 0 \\ (1 - \gamma^2) U_{z,xz} + U_{x,xx} + \gamma^2 U_{x,zz} + \gamma^2 k^2 U_x &= 0 \end{aligned} \quad (3),$$

где $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$; $\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$.

Для примера вычислим некоторые компоненты ядер в (1, 2). Сначала вычислим элемент $G_{zzU}(x, z)$. Для уравнений (1) обусловленность будет максимальной, если одна из компонент этого тензора на верхней границе есть ноль, а вторая сосредоточена в точке. Однако, вычислять производные (т.е. вектор нагрузок на поверхности) гораздо удобнее, если ядро является гадким и не имеет сингулярностей. Под сосредоточенным источником обычно понимают дельта-функцию, которую можно представить в виде:

$$\delta_k(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(k_r x) dk_r \quad (4)$$

Запишем, аналогично [5], один из вариантов общего вида решения в разделённых переменных в верхнем полупространстве ($z \geq 0$):

$$\begin{bmatrix} U_z \\ U_x \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \varphi_{s1} \cos(k_r x) \\ \varphi_{s2} \sin(k_r x) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \varphi_{p1} \cos(k_r x) \\ \varphi_{p2} \sin(k_r x) \end{bmatrix} \quad (5)$$

При этом первый столбец должен быть бездивергентным вектором, а второй – безвихревым. В дальнейшем эти решения будем интегрировать по той же переменной, что и в (4), но с другим пределом интегрирования. Очевидно, что в случае $k_r^2 \geq k^2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_{s1} \\ \varphi_{s2} \end{bmatrix} &= \exp(-\nu_s z) \begin{bmatrix} k_r \\ \nu_s \end{bmatrix}, \nu_s = \sqrt{k_r^2 - k^2} \\ \begin{bmatrix} \varphi_{p1} \\ \varphi_{p2} \end{bmatrix} &= \exp(-\nu_p z) \begin{bmatrix} \nu_p \\ k_r \end{bmatrix}, \nu_p = \sqrt{k_r^2 - \gamma^2 k^2} \end{aligned} \quad (6),$$

в случае $k_r^2 < \gamma^2 k^2$ вместо экспонент будут синусы и косинусы:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_{s1} \\ \varphi_{s2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_r (\cos(\nu_{s1} z) - \sin(\nu_{s1} z)) \\ \nu_{s1} (\cos(\nu_{s1} z) + \sin(\nu_{s1} z)) \end{bmatrix}, \nu_{s1} = \sqrt{k^2 - k_r^2} \\ \begin{bmatrix} \varphi_{p1} \\ \varphi_{p2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu_{p1} (\cos(\nu_{p1} z) - \sin(\nu_{p1} z)) \\ -k_r (\cos(\nu_{p1} z) + \sin(\nu_{p1} z)) \end{bmatrix}, \nu_{p1} = \sqrt{\gamma^2 k^2 - k_r^2} \end{aligned} \quad (7),$$

в промежуточной области интегрирования в общем решении (5) первый столбец следует взять из (6), второй – из (7). Выберем константы C_1, C_2 так, чтобы

$$\begin{bmatrix} C_1 \varphi_{s1}(0) + C_2 \varphi_{p1}(0) \\ C_1 \varphi_{s2}(0) + C_2 \varphi_{p2}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_z \\ U_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

В этом случае мы получим решения задачи о штампе. Многие классические решения теории упругости содержат сингулярности. Как показано в [6] сингулярности в задачах теории упругости не являются строго физически обусловленными и появляются вследствие несоответствия между математической и физической моделями сплошной среды. Один из способов преодолеть сингулярность – использование конечного аналога сосредоточенного источника [4]. Под конечным аналогом будем подразумевать ту же функцию, что и (4), но с конечным, хотя и достаточно большим интервалом интегрирования N . Также выбросим из интегрирования малые окрестности точек, в которых будут обращаться в ноль знаменатели. В этом случае уравнения будут удовлетворяться точно (аналитически), а перемещения и нагрузки в уравнениях (1, 2) будут согласованы, т.е. взаимно вычисляемы друг через друга.

Например, в диапазоне $k_r^2 \geq k^2$ подынтегральные выражения для компоненты ядра $G_{zzU}(x, z)$ в области интегрирования $k_r \geq k$ будут иметь вид:

$$G_{zzU \text{int}}(x, z) = \frac{\cos(k_r x) (k_r^2 \exp(-\nu_s z) - \nu_p \nu_s \exp(-\nu_p z))}{\pi (k_r^2 - \nu_p \nu_s)} \quad (9)$$

В этой же области интегрирования элемент ядра $G_{zzP \text{int}}$ имеет вид:

$$G_{zzPint}(x, z) = \frac{\mu \cos(k_r x) \left(- (2k_r^2 - k^2)^2 \exp(-v_s z) + 4k_r^2 v_p v_s \exp(-v_p z) \right)}{\pi \left(4k_r^2 v_p v_s - (2k_r^2 - k^2)^2 \right)} \quad (10)$$

Остальные подынтегральные выражения для компонент ядер вычисляются аналогично. Теперь построим конечный аналог дельта-функции, единый как для сосредоточенного перемещения, так и для сосредоточенной нагрузки, т.е. изменим в (4) промежутки интегрирования. Все решения для двух типов ядер в (1, 2) есть решения, при которых либо одна из компонент перемещения, либо одна из компонент нагрузки есть:

$$\delta_k^*(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^N \cos(k_r x) dk_r \quad (11)$$

Вторая же компонента либо вектора нагрузки, либо перемещений есть ноль. Теперь попытаемся задать число N . Оно должно быть достаточно велико, чтобы сохранить обусловленность, и, в тоже время, не слишком велико, чтобы не вести интегрирование по слишком большому промежутку. Полагаю разумным при $k = 1$ положить $N = 100$. Систему уравнений (1) или (2) предлагаю решать методом сведения к системе алгебраических уравнений путём превращения ядер в вырожденные с помощью разложения в ряд Фурье вектора потенциала в бегущей точке, а затем с помощью разложения в ряд Фурье свободного члена в фиксированной точке. Это означает, что ядро нужно будет проинтегрировать два раза и при сопоставлении коэффициентов разложения в ряд Фурье получится система линейных уравнений. В случае, если поверхность является плоской, то оба интеграла вычисляются аналитически, например:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_x x) \cos(k_r (x_0 - x)) dx = \cos(k_r x_0) \times \begin{cases} \frac{2k_r (-1)^{k_x} \sin(\pi k_r)}{k_r^2 - k_x^2}, k_r \neq k_x \\ \pi, k_r = k_x \end{cases} \quad (12)$$

Если же поверхность не является плоской, то ядра нужно будет правильно сориентировать [4], и провести те же вычисления численно. При этом обусловленность системы снизится незначительно, если нормаль к границе раздела не изменяется слишком быстро. В любом случае полученные интегралы по поверхности можно называть пространственными фазовыми портретами этих поверхностей. Например, коэффициенты дважды чётного разложения имеют вид:

$$G_{ikU I_0 ICC}(x_0, z_0) = \int G_{ikU}(x_0 - x, z_0 - z) \cos(\omega_0 l x) \cos(\omega_0 I_0 x_0) dx dx_0 dl \quad (13)$$

Для вычисления компонент тензоров останутся интегралы по параметру k_r . Однако, эти аналоги тензоров Грина для двухмерного полупространства (или задачи о штампе) при решении краевых задач не используются. Используются лишь их фазовые портреты на поверхностях. И эти решения не имеют сингулярностей.

Заметим, что в случае плоской границы все ядра записываются в разделённых переменных.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим пример. Предположим, что нагрузка и перемещение на верхней поверхности обращаются в ноль за пределами интервала $[-\pi, \pi]$, на верхней поверхности однородной среды упругими модулями и плотностью, равными единице, задана нагрузка и нужно найти перемещение. Пусть нормальная компонента нагрузки имеет вид, представленный на рисунке 1 (а касательная есть ноль):

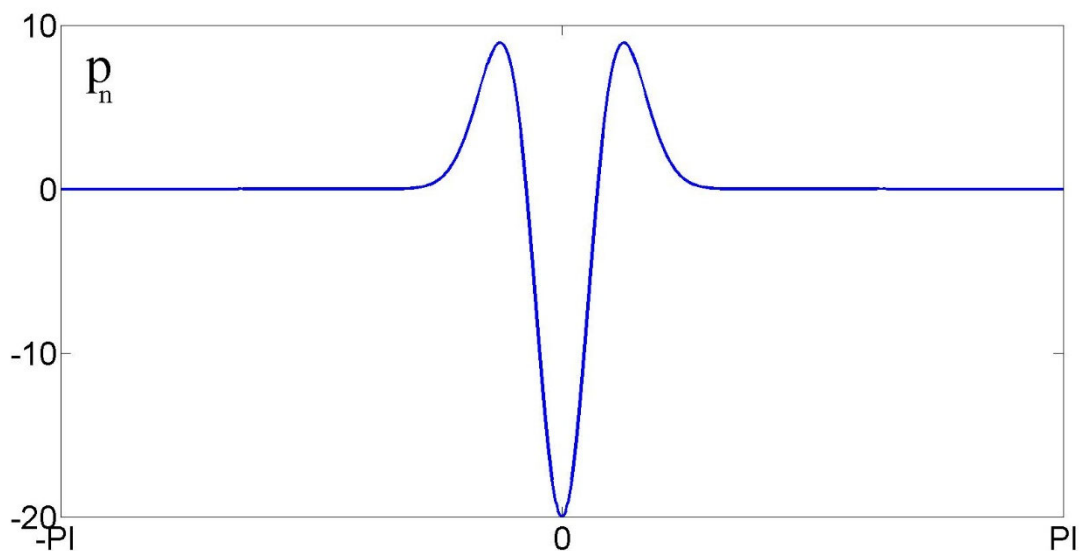


Рис. 1. Нормальная компонента вектора нагрузок на свободной поверхности.

Вычислим спектральные компоненты ядер и сравним с компонентами разложения в ряд Фурье свободного члена (первая компонента - рис. 1, вторая ноль), используя 81 член разложения в ряд Фурье для каждой компоненты.

Вид матрицы, использованной при решении этой задачи представлен на рисунке 2. Её число обусловленности близко к единице. Это означает, что данный алгоритм можно использовать и для решения пространственных задач первого и второго типа. Нормальная компонента вектора перемещений, вычисленная подобным образом, изображена на рисунке 3.

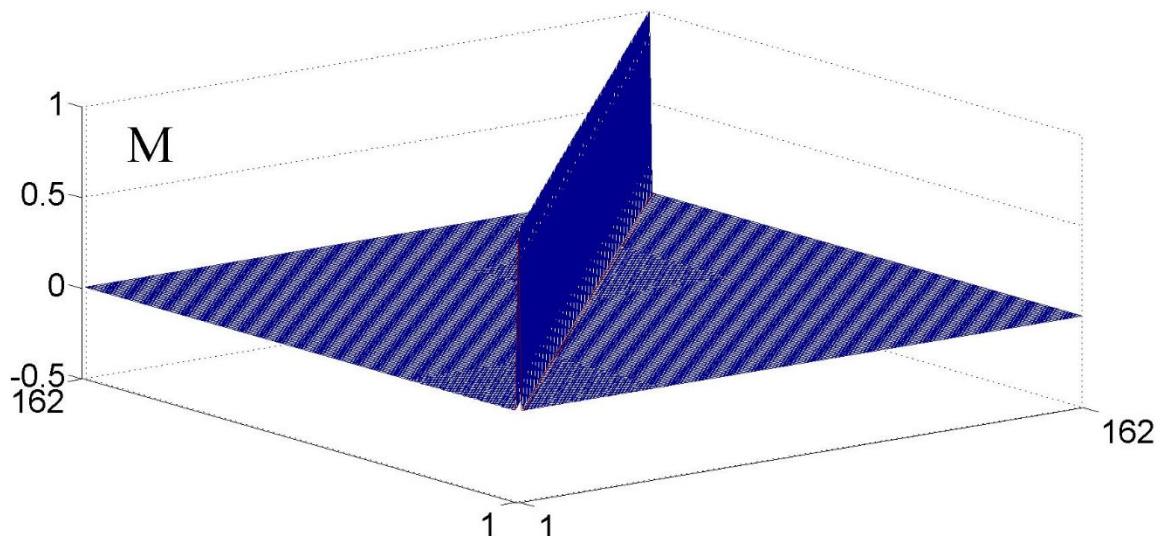


Рис.2. Изображение матрицы, использованной для нахождения решение задачи (2) в однородной среде

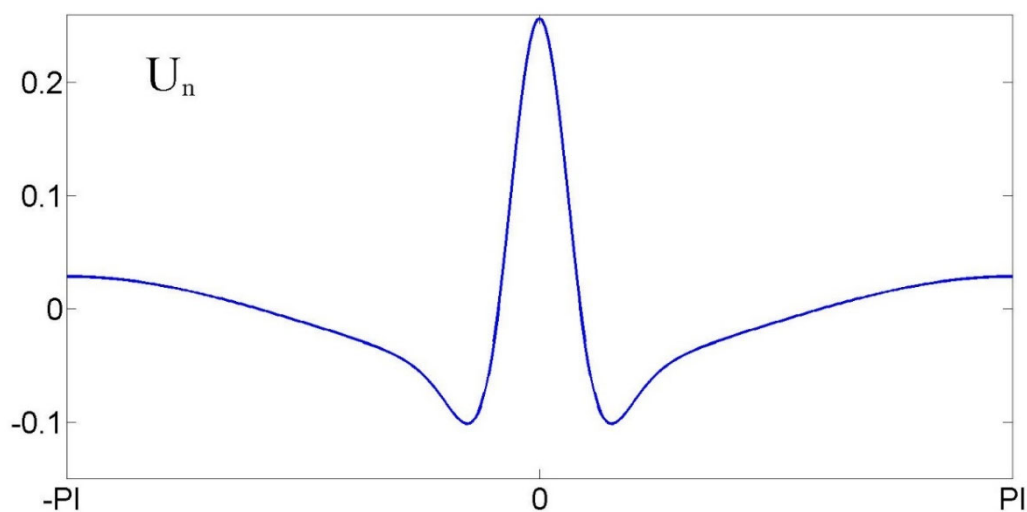


Рис. 3. Нормальная компонента вектора перемещений.

Опасения относительно пригодности и эффективности данного алгоритма для решения трёхмерных краевых задач может быть связано только с задачами третьего (смешанного) типа. Наличие границ раздела внутри среды приводит к необходимости решения граничных задач смешанного типа. Не приведёт ли наличие границ, либо наличие задач смешанного типа к существенному повышению числа обусловленности системы при решении краевой задачи таким способом?

Для решения этого вопроса рассмотрим задачу отражения от границы, расположенной на глубине 0.5 и с теми же параметрами, только модуль сдвига в два раза больше. То есть мы имеем двухмерный слой на полупространстве.

Рассмотрим свойства матрицы системы, полученной аналогично, но уже для слоя на полупространстве.

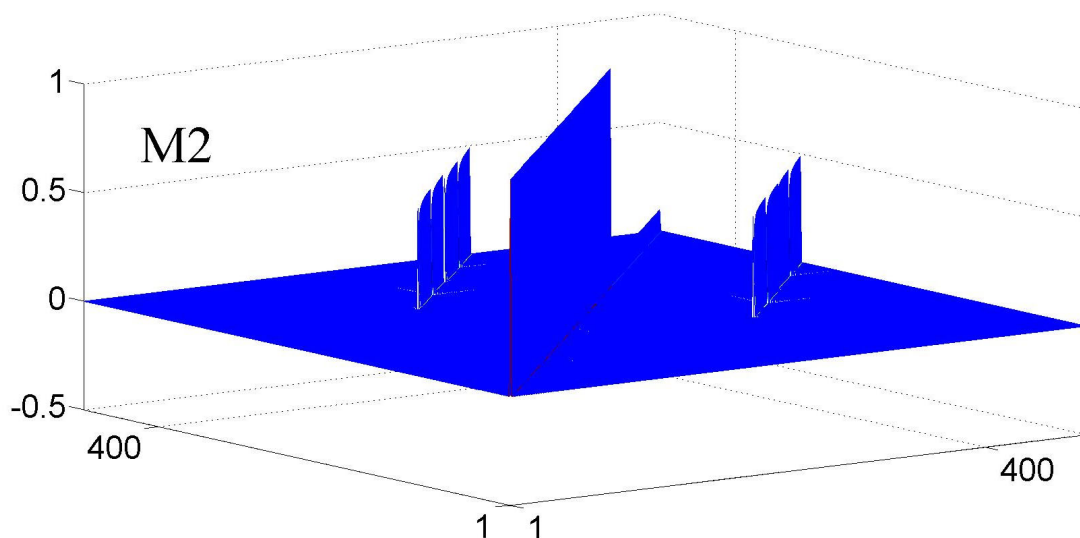


Рис.4. Изображение матрицы M_2 , использованной для нахождения решения задачи для плоского слоя на полупространстве.

Матрица M_2 для этого случая (т.е. для задачи смешанного типа) изображена на рисунке 4. Число обусловленности этой матрицы чуть меньше 100, несмотря на достаточно большую размерность матрицы (486×486). Это говорит о том, что данный алгоритм вполне может использоваться для решения трёхмерных краевых задач, в том числе смешанного типа. Данный подход может быть особенно полезным в том случае, когда характерный размер слоя меньше длины поперечной волны, и алгоритмы, связанные с тем или иным использованием лучевого метода, не работают.

Заключение

В работе представлен усовершенствованный метод решения краевых задач упругих стационарных колебаний. Краевая задача сводится к системе интегральных уравнений с гладкими ядрами. Спектральное разложение этих ядер приводит к системе линейных уравнений с низким числом обусловленности. Таким образом, новый метод решения позволяет находить решения краевых задач, в том числе смешанного типа, с высокой точностью и достоверностью.

Благодарности

Автор выражает благодарность компании PETROBRAS/CENPES.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов К.М., Винник П.М., Иванов В.Н. Численное моделирование разделительных процессов обработки давлением // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2012. – № 2 (33). – С. 192–199.

2. Сибиряков Е.Б. Зависимость эффективных упругих модулей кавернозных тел от частоты // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 5 (327). – С. 126–134.
3. Сибиряков Б.П., Сибиряков Е.Б. Зависимость преимущественной ориентации трещин от рельефа в верхней части разреза // Технологии сейсморазведки. – 2016. – № 4. – С. 61–66.
4. Сибиряков Е.Б. О детектировании шероховатых границ // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20, № 6. – С. 98–104.
5. Лурье С.А., Волков-Богородский Д.Б. // Тензор Грина и решение задачи Буссинеска в обобщённой теории упругости // Механика твёрдого тела, № 4, 2018, С.100-114.
6. Зиятдинов С.Р, Каштан Б.М. Примесные компоненты волны // Вопросы геофизики. – 2005. – Вып. 38. – С. 46–55.

© Е. Б. Сибиряков, 2023