

В. В. Лисица^{1}, Т. С. Хачкова², Е. А. Гондюл², В. В. Крутько³, А. С. Авдонин³*

Моделирование флюидопотоков в образцах с микропористыми включениями

¹ Институт математики СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

³ Газпромнефть НТЦ, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

* e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В работе представлен численный алгоритм для моделирования двухфазного течения в образцах горных пород, содержащих как открытые поры, так и поры, заполненные микропористым материалом. Для моделирования потоков используется уравнение Навье-Стокса-Бринкмана. Перенос фаз определяется уравнением Кана-Хиллиарда в открытых порах и уравнением Баклея-Левретта в пористом материале. В работе предложена единая конечно-разностная аппроксимация двух уравнений переноса, удовлетворяющая естественным условиям сопряжения. Однако уравнение Кана-Хиллиарда требует дополнительного граничного условия, которое должно быть выполнено на границе раздела, чтобы обеспечить угол смачивания.

Ключевые слова: метод фазового поля, течение в пористой среде, конечно-разностные схемы

V. V. Lisitsa^{1}, T. S. Khachkova², E. A. Gondul², V. V. Krutko³, A. S. Avdonin³*

Simulataion of fluid flow in rock samples with microporous material

¹ Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

² Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

³ GazPromNeft NTC, Soaint Petersburg, Russian Federation

* e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

Abstract. We present an original numerical algorithm to simulate multi-phase fluid flow in rock samples where pores filled with microporous material. We use Navier-Stokes-Brinkmann equation to simulate copled flow in double-porosity model. Phase transport satisfies Kahn-Hilliard equation in the open pores and Buckley-Leverett equation in microporous material. To couple the two transport equations, we suggested an original finite-differnece scheme satisfying the natural conjugation conditionas at the interface. Additioanlly, the boundary condition for the Kahn-Hilliard equation is stated to satisfy the wetting angle condition.

Keywords: Phase-field method, flow in porous media, finite-difference simulation

Введение

Моделирование флюидопотоков на масштабе пор является основной областью применения вычислительной физики горных пород или технологии «цифровой керн». Вычислительная физика горных пород позволяет оценивать эффективные физические свойства пород на основе численных экспериментов с использованием микротомографических изображений породы [1]. Этот подход

нашел широкое применение для оценки различных свойств керна, включая удельное электрическое сопротивление [2, 3], параметры упругости, такие как объемный модуль или компоненты тензора жесткости [4], коэффициенты затухания сейсмических волн и другие. Тем не менее, моделирование потока жидкости является наиболее широко используемым приложением, поскольку его результаты могут быть напрямую применены к разработке углеводородов, захоронению парниковых газов и пр. В частности, моделирование однофазного течения используется для оценки абсолютной проницаемости, открытой пористости и извилистости порового пространства образцов [2, 5].

Моделирование двух- и многофазных течений в поровом пространстве со сложной топологией является вычислительно сложной задачей, поскольку требует учета положения подвижной границы раздела фаз. Существует несколько подходов к решению этой проблемы, в том числе методы прямого отслеживания фронта [6], метод поверхности уровня [7] и метод фазового поля [8]. Первый подход трудно реализовать в трехмерных случаях, особенно в областях со сложной топологией. Второй подход позволяет неявно определить интерфейс как нулевой уровень функции расстояния со знаком. Это позволяет обрабатывать сложную геометрию расчетной области. Однако численная ошибка в решении, полученном этим методом, проявляется в нефизичном изменении объема фаз, что требует дополнительной регуляризации [9]. Кроме того, аппроксимация условия на угол смачивания также является сложной задачей для метода поверхности уровня. В методе фазового поля применяется подход диффузного интерфейса – граница раздела фаз сглаживается на нескольких ячейках сетки. Это делает функцию концентрации достаточно гладкой, чтобы ее можно было аппроксимировать сеточными функциями, используемыми в методе конечных разностей, конечных объемов или конечных элементов [8]. Однако применение этого подхода требует решения дополнительного дифференциального уравнения четвертого порядка – уравнения Кана-Хиллиарда. Благодаря своей относительной простоте и применимости к областям почти произвольной сложности, этот подход получает широкое распространение в моделировании потоков флюидов в масштабе пор.

Однако обычно пористые материалы могут содержать несколько масштабов пор, то есть достаточно большие поры могут быть заполнены микропористым материалом, который все еще способен поддерживать многофазный поток. Однофазный поток в таких средах может быть смоделирован либо путем явной декомпозиции области с использованием мультифизических подходов или с использованием уравнения Навье-Стокса-Бринкмана [9]. При этом единого подхода к рассмотрению фазового переноса в открытых порах (где справедливо уравнение Кана-Хиллиарда) и микропористом материале (где сформулировано уравнение Баклея-Левретта) не существует. В этой статье мы представляем такой подход и иллюстрируем его применимость с помощью серии численных экспериментов в трехмерной постановке.

Постановка задачи

Рассматривается модель породы с порами, заполненными проницаемым микропористым материалом, а также с открытыми порами. Мы предполагаем, что течение жидкости в открытых порах подчиняется уравнению Навье-Стокса, тогда как течение в микропористом материале подчиняется закону Дарси. Пусть введена расчетная область $\Omega = [0; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$, соответствующая КТ-изображению керна. Область состоит из трех неперекрывающихся (многосвязных) подобластей Ω_s – непроницаемая матрица породы, Ω_p – подобласть, заполненная проницаемым микропористым материалом, Ω_o – подобласть, соответствующая открытым порам. Также необходимо ввести границы Γ_b – боковые границы расчетной области $x_2=0$, $x_2=L_2$, $x_3=0$, $x_3=L_3$, граница на входе Γ_{in} соответствуют $x_1=0$, а на выходе Γ_{out} соответствуют $x_1=L_1$, интерфейсы между разными типами подобластей: $\Gamma_{so} = \Omega_o \cap \Omega_s$, $\Gamma_{sp} = \Omega_p \cap \Omega_s$ и $\Gamma_{po} = \Omega_o \cap \Omega_p$. Первые два интерфейса непроницаемы, а третий интерфейс поддерживает поток жидкости.

Флюидопоток в модели среды с двойной пористостью описывается уравнением Навье-Стокса-Бринкмана [10]:

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{2}{\phi} \nabla \cdot (\nu \varepsilon(\vec{v})) - \kappa^{-1} \vec{v} + \vec{F},$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = 0.$$

где \vec{v} – вектор усредненной скорости, p – давление, $\varepsilon(v) = \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T$ удвоенный тензор деформации, $\rho = \rho(x, t)$ – плотность жидкости, зависящая от конкретной фазы, $\nu = \nu(x, t)$ – вязкость жидкости, также зависящая от фазы, $\kappa(x, t) = \kappa_0(x) \lambda$ – проницаемость, где κ_0 – абсолютная проницаемость, а λ – мобильность флюида, зависящая от насыщения, ϕ – пористость, \vec{F} – внешние силы, в том числе капиллярные.

Также нам нужно указать граничные условия, обеспечивающие отсутствие потока через боковые границы расчетной области и через интерфейс порового пространства и матрицы породы и условия на границах на входе и выходе потока. Непрерывность скорости и давления на границе раздела Γ_{op} открытых пор и заполненных микропористым материалом неявно удовлетворяются уравнением Навье-Стокса-Бринкмана. Начальные условия предполагаются равными нулю.

Для моделирования фазового переноса в открытых порах используется модель фазового поля [8]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \psi = \nabla \cdot (M(\psi) \nabla \mu),$$

$$\mu = F'(\psi) - \varepsilon^2 \Delta \psi,$$

где $\psi \in [0,1]$ – параметр порядка, определяющий фазу. Потенциал $F(\psi)$ определяется как $F'(\psi) = 2\psi(\psi - 1)(2\psi - 1)$. Это уравнение содержит производные четвертого порядка по пространству, поэтому краевая задача требует двух граничных условий на каждой границе:

$$\begin{aligned} \nabla\mu \cdot \vec{n} &= 0, & \nabla\psi \cdot \vec{n} &= -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(\psi^2 - \psi)\cos(\theta), & \vec{x} &\in \Gamma_b \cup \Gamma_{so}, \\ \nabla\mu \cdot \vec{n} &= 0, & \nabla\psi \cdot \vec{n} &= 0, & \vec{x} &\in \Gamma_{out}, \\ \nabla\mu \cdot \vec{n} &= 0, & \psi &= \Psi_{in}, & \vec{x} &\in \Gamma_{in}. \end{aligned}$$

Первый набор условий устанавливается на непроницаемых границах и обеспечивает угол смачивания, равный θ , который измеряется для первой фазы, т. е. $\psi = 1$. Условие на выходе позволяет фазе свободно вытекать наружу. Третье условие определяет распределение фаз на входе. Условие на интерфейсе Γ_{op} отсутствует. Это является предметом настоящего исследования и будет конкретизировано ниже.

Перенос фазы в микропористой среде удовлетворяет уравнению Баклея-Левретта, обычно записываемому для смачивающей фазы:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_1(S)}{\lambda(S)} \vec{u} \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \frac{\lambda_1(S)\lambda_0(S)}{\lambda(S)} \frac{dp_{01}}{dS} \nabla S \right) = 0.$$

где S – насыщение первой (смачивающей) фазы, $S \in [0,1]$. Параметры $\lambda_j = \kappa_{rj} / \nu_j$ – подвижности соответствующих фаз, суммарная подвижность $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, κ_{rj} – относительная фазовая проницаемость фазы, зависящая от насыщенности, а ν_j – вязкость фазы j . Параметр p_{01} представляет собой разность давлений между фазами 0 и 1. Уравнение формулируется в области Ω_p , т.е. в микропористой среде. На всех границах, кроме Γ_{in} , задаются условия Неймана, а на Γ_{in} – условие Дирихле.

Для построения условий сопряжения на границе Γ_{op} уравнения Кана-Хилларда и Баклея-Левретта удобно переписать в псевдодивергентной форме:

$$\phi \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (f(q)\vec{u}) - \nabla \cdot (D(q)\nabla\mu) = 0, \quad \mu(x \in \Omega_o) = F'(q) - \varepsilon^2 \Delta q, \quad \mu(x \in \Omega_p) = q,$$

где q представляет либо нормированное насыщение S для уравнения Баклея-Левретта, либо параметр порядка ψ для уравнения Кана-Хилларда. Коэффициенты уравнения можно представить следующим образом:

$$f(q) = \begin{cases} q, & x \in \Omega_o \\ \lambda_1(q) / \lambda(q), & x \in \Omega_p \end{cases}$$

$$D(q) = \begin{cases} M(q), & x \in \Omega_o \\ -\kappa \frac{\lambda_1(S)\lambda_2(S)}{\lambda(S)} \frac{dp_{21}}{dS}, & x \in \Omega_p \end{cases}$$

$$\mu(q) = \begin{cases} F'(q) - \varepsilon^2 \Delta q, & x \in \Omega_o \\ q, & x \in \Omega_p \end{cases}$$

После этого можно построить условия сопряжения, обеспечивающие непрерывность потока через границу:

$$[f(q)] = 0, \quad [D \frac{\partial \mu}{\partial n}] = 0.$$

Соотношения можно переформулировать в исходных обозначениях как

$$\psi|_{0-} = \lambda_1(S) / \lambda(S)|_{0+}, \quad M \frac{\partial \mu}{\partial x}|_{0-} = -\kappa \frac{\lambda_1(S)\lambda_2(S)}{\lambda(S)} \frac{dp_{21}}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}|_{0+}.$$

Дополнительно на этом интерфейсе необходимо поставить граничное условие на угол смачивания:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} (\psi^2 - \psi) \cos(\theta)|_{0-}.$$

Для численного решения полученной задачи использовалась явная по времени конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству и первого – по времени.

Численные эксперименты

Первая серия экспериментов была проведена для верификации алгоритма. Рассматривалась расчетная область Ω - куб со стороной $2 \cdot 10^{-4}$ м. В подобласти $x_1 \in [4 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5}]$ м был введен непроницаемый материал. Внешний поток не вводился. После этого были поставлены начальные условия двух типов. Во-первых, фаза 1 занимает область Ω_0 , за исключением капли фазы 0, которая представляла собой полусферу радиусом $4 \cdot 10^{-5}$ м с центром в точке $(8 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-4})$. Во-вторых, рассматривалась обратная ситуация; капля фазы 1 во вмещающей среде, заполненной фазой 0. Во всех экспериментах фаза 1 предполагается смачивающей и угол смачивания измеряется по отношению к ней, так что он всегда меньше 90° . Остальные параметры жидкостей были фиксированы: $\rho_1 = 1000$ кг/м³, $\nu_1 = 3.8 \cdot 10^{-4}$ Па/с, $\rho_0 = 880$ кг/м³, $\nu_0 = 3.027 \cdot 10^{-3}$ Па/с, межфазное трение $\sigma = 2.571 \cdot 10^{-2}$

Н/м. Моделирование проводилось с использованием пространственных шагов, равных $2 \cdot 10^{-6}$ м. Таким образом, радиус исходной капли составлял всего 20 узлов сетки. Под воздействием сил поверхностного натяжения в зависимости от угла смачивания капля принимает форму сегмента сферы с радиусом кривизны, который оценивается по формуле:

$$R_f = R_0 \left(\frac{2}{2 - 3 \cos(\theta) + \cos^3(\theta)} \right)^{1/3}.$$

где R_0 – начальный радиус капли (полусферы). Также может быть оценен перепад давления в капле и вне ее $\Delta P = \frac{2\sigma}{R_f}$,

Теоретическая оценка разницы давлений внутри и снаружи капли и результаты численных экспериментов приведены в табл. 1. Видно, что ошибка вычислений не превышает 5%. Для иллюстрации решения на рис. 1 приводятся двумерные сечения решений для случаев $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 120^\circ$.

Таблица 1

Теоретическая оценка (ΔP_t) и результаты моделирования (ΔP_e) разности давлений внутри и снаружи капли, помещенной на плоскую поверхность, для разных углов смачивания

угол	R_f	ΔP_t	ΔP_n	угол	R_f	ΔP_t	ΔP_n
20	$22 \cdot 10^{-5}$	224.8	219	160	$3.18 \cdot 10^{-5}$	1618	1703
30	$13 \cdot 10^{-5}$	379	376	150	$3.19 \cdot 10^{-5}$	1612	1697
40	$9.46 \cdot 10^{-5}$	543	547	140	$3.22 \cdot 10^{-5}$	1598	1690
50	$7.24 \cdot 10^{-5}$	710	719	130	$3.27 \cdot 10^{-5}$	1572	1658
60	$5.89 \cdot 10^{-5}$	872	889	120	$3.36 \cdot 10^{-5}$	1530	1607
70	$5.02 \cdot 10^{-5}$	1025	1049	110	$3.5 \cdot 10^{-5}$	1469	1533
80	$4.42 \cdot 10^{-5}$	1163	1198	100	$3.71 \cdot 10^{-5}$	1387	1439

Вторая серия экспериментов была проведена для капли, помещенной на плоскую поверхность пористого материала. В качестве начальных условий мы использовали результаты предыдущих симуляций с разными углами смачивания. Размер области и шаг сетки остались прежними. Непроницаемый слой заменялся на микропористый материал с пористостью, равной 0,1, и абсолютной проницаемостью $\kappa_0 = 10^{-13} \text{ м}^2$, что примерно равно 0,1 Дарси. Перепад давления между входом и выходом был $\Delta P = 10^5$ Па. Модельное время составило $1,35 \cdot 10^{-3}$ с, таким образом, была закачана примерно половина порового объема. Отметим, что начальная насыщенность пористого материала составляла S_{0r} , если вмещающая модель была заполнена фазой 0, и $1 - S_{0r}$, если - фазой 1. Моментальные

снимки решения со смачивающей и несмачивающей каплей представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

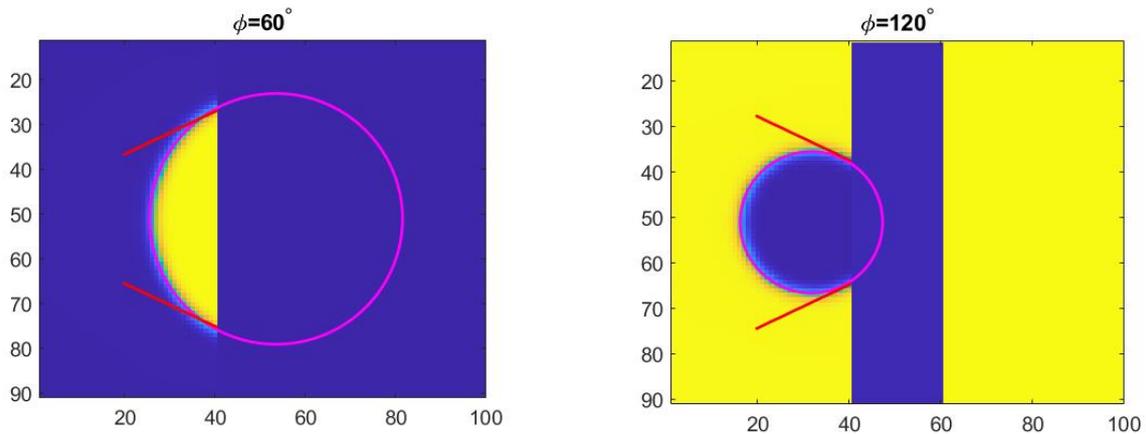


Рис. 1. Двумерные сечения каплей на непроницаемой поверхности, соответствующие углам смачивания 60° (слева) и 120° (справа). Круг представляет поперечное сечение теоретически предсказанной формы капли. Наклон линий соответствует углам смачивания

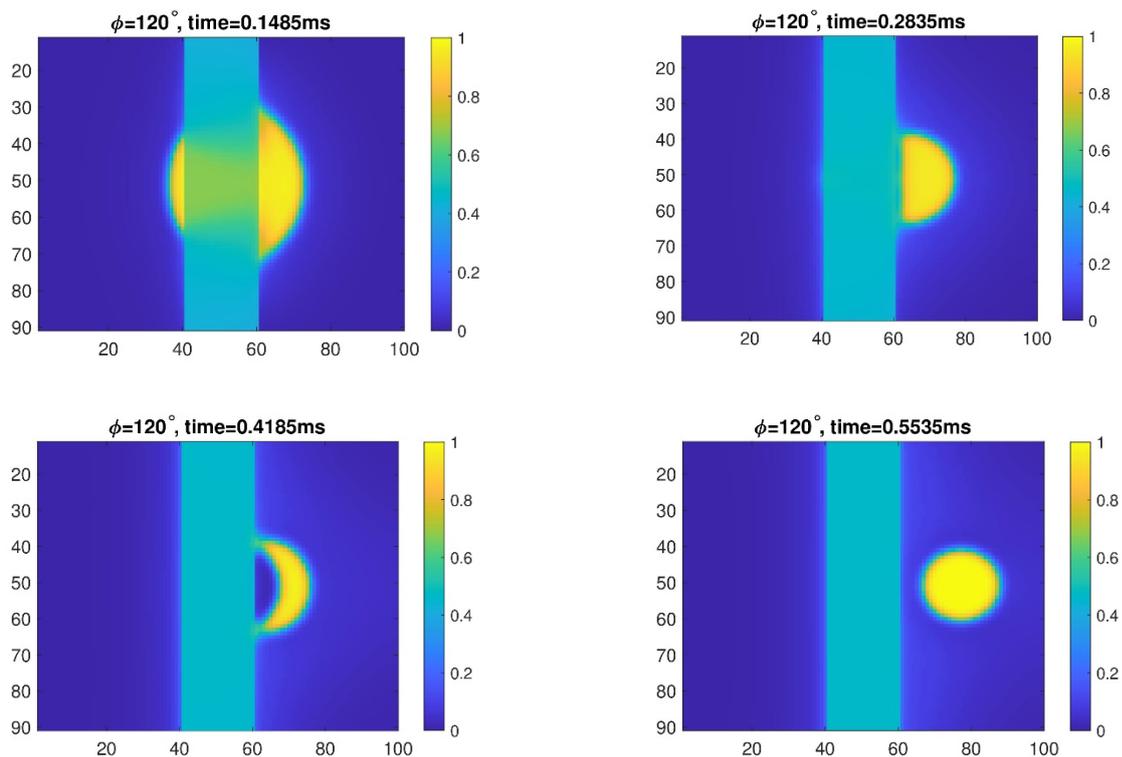


Рис. 2. Двумерные сечения каплей на пористом слое, соответствующие углам смачивания 60° в разные моменты времени

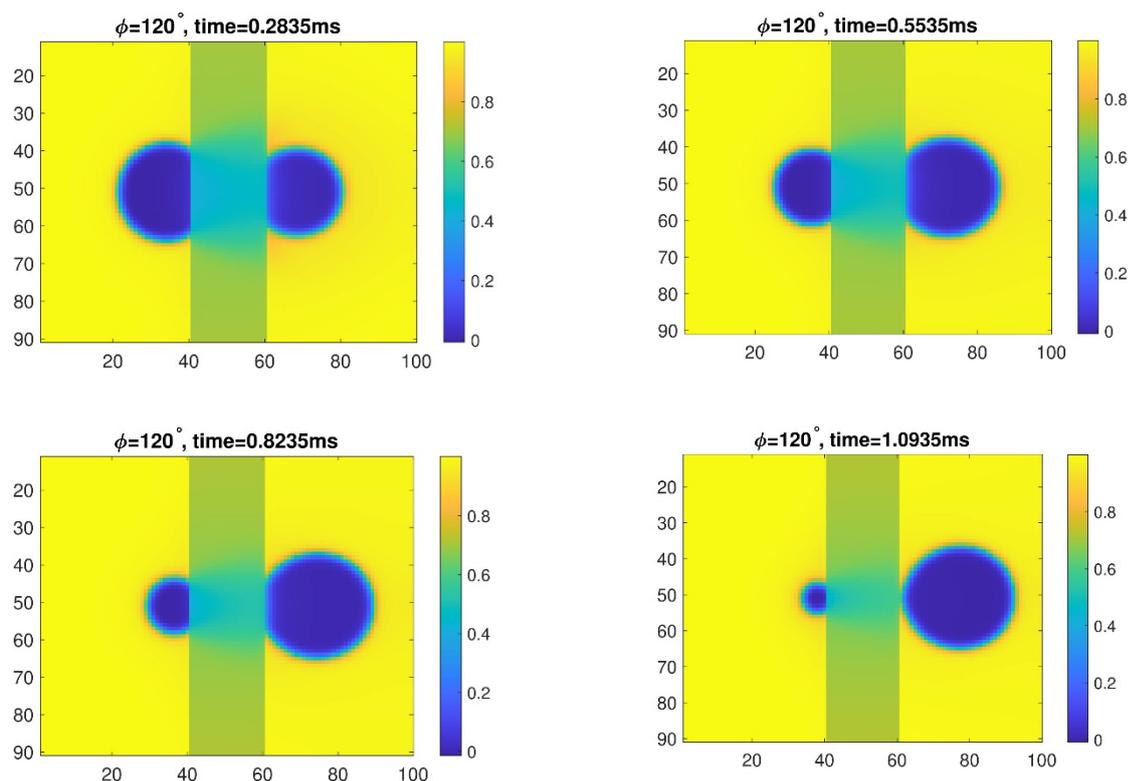


Рис. 3. Двумерные сечения капель на пористом слое, соответствующие углам смачивания 120° в разные моменты времени

Если рассматривается капля смачивающей жидкости, то процесс фильтрации протекает быстро, так что снимки представляются в более ранние моменты времени, чем во всех других рассмотренных случаях. Заметим, что смачивающая жидкость стремится насытить пористый материал и лишь относительно небольшая ее часть вытекает. Кроме того, несмачивающая фаза, вытекающая из пористого материала, начинает формировать каплю внутри смачивающей фазы до тех пор, пока смачивающая фаза не отделится. Объем пузырька смачивающей фазы значительно меньше, чем на начальном этапе, так как он частично запирается капиллярными силами внутри пористого материала. Противоположная ситуация наблюдается, если несмачивающая фаза образует каплю на пористом материале. Несмачивающая фаза фильтруется через пористый слой под действием внешнего потока. Практически не наблюдается диффузионного растекания несмачивающей фазы в тангенциальных направлениях внутри пористого слоя, поэтому внешний поток является основным фактором переноса. При прорыве пористого слоя несмачивающая фаза образует сферический пузырь.

Заключение

В работе представлен численный алгоритм для моделирования двухфазного течения в образцах горных пород, содержащих как открытые поры, так и поры, заполненные микропористым материалом. Для моделирования потоков исполь-

зуется уравнение Навье-Стокса-Бринкмана. Перенос фаз определяется уравнением Кана-Хиллиарда в открытых порах и уравнением Баклея-Лаверетта в пористом материале. В работе предложена единая конечно-разностная аппроксимация двух уравнений переноса, удовлетворяющая естественным условиям сопряжения. Однако уравнение Кана-Хиллиарда требует дополнительного граничного условия, которое должно быть выполнено на границе раздела, чтобы обеспечить угол смачивания.

Благодарности

Т. Хачкова разработала алгоритм для совместного решения уравнений Кана-Хиллиарда и Баклея-Лаверетта, Е. Гондюл провела анализ численных схем для уравнения Кана-Хиллиарда в рамках работ по гос. заданию FWZZ-2022-0022. В. Лисица повел численные эксперименты с использованием кластера Суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета в рамках проекта РФФ 21-71-20003.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Andra H. et al. Digital rock physics benchmarks – Part I: Imaging and segmentation // *Computers & Geosciences*. – 2013. – Vol. 50. – P. 25-32.
2. Andra H. et al. Digital rock physics benchmarks – Part II: Computing effective properties // *Computers & Geosciences*. – 2013. – Vol. 50. – P. 33-43.
3. Khachkova T. et al. GPU-based algorithm for evaluating the electrical resistivity of digital rocks // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2021. – Vol. 82. – P. 200-211.
4. Shulakova V. et al. Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of X-ray micro-tomographic images // *Geophysical Prospecting*. – 2013. – Vol. 61. – No 2. – P. 287-301.
5. Хачкова Т. С. И др. Новая методика численной оценки абсолютной проницаемости горных пород по их микротомографическим изображениям // *Геофизика*. – 2023. – №1. – С. 43-40.
6. Groot R. D. Second order front tracking algorithm for Stefan problem on a regular grid // *Journal of Computational Physics*. – 2018. – Vol. 372. – P. 956-971.
7. Gibou F., Fedkiw R., and Osher S. A review of level-set methods and some recent applications // *Journal of Computational Physics*. – 2018. – Vol. 353. – P. 82-109.
8. Kim J. Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows // *Communications in Computational Physics*. – 2012. – Vol. 12. – No 3. – P. 613-661.
9. Jettestuen E., Friis H. A., and Helland J. O. A locally conservative multiphase level set method for capillary-controlled displacements in porous media // *Journal of Computational Physics*. – 2021. – Vol. 428. – P. 109965.
10. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Journal of Applied Sciences Research*. – 1947. – Vol. A1. – P. 27-34.

© В. В. Лисица, Т. С. Хачкова, Е. А. Гондюл, В. В. Крутько, А. С. Авдонин, 2023