

*Е. Н. Шер<sup>1\*</sup>, И. В. Колыхалов<sup>1</sup>*

## **Оценка точности расчета развития осесимметричных трещин гидроразрыва методом разрывных смещений**

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт горного дела им. Н. А. Чинакала» СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация  
\* e-mail: ensheer@gmail.com

**Аннотация.** Проведено тестирование программы ASDD-T, разработанной по варианту метода разрывных смещений, предложенного Краучем, для расчета развития осесимметричных трещин при взрыве и гидроразрыве горных пород. Тестирование проведено на двух задачах с осесимметричными трещинами сферической и цилиндрической формы, имеющих точное решение. Сравнивались значения интенсивности высвобождения механической энергии при виртуальном росте трещин и смещений их берегов. Оказалось, что отличие рассчитанных по программе данных от точных значений не превосходит в среднем 4% с максимальным отклонением в отдельных случаях до 13%.

**Ключевые слова:** метод разрывных смещений, осесимметричные трещины, точность расчетов

*E. N. Sher<sup>1\*</sup>, I. V. Kolykhalov<sup>1</sup>*

## **Definition Estimation of Accuracy of Calculation of Development of Axisymmetric Hydraulic Fractures by Discontinuous Displacement Method**

<sup>1</sup> Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation  
\* e-mail: ensheer@gmail.com

**Abstract.** Testing of the ASDD-T program, developed according to a variant of the discontinuous displacement method proposed by Crouch, was carried out to calculate the development of axisymmetric cracks during explosion and hydraulic fracturing of rocks. Testing was carried out on two problems with axisymmetric spherical and cylindrical cracks that have an exact solution. The values of the values of the specific release of mechanical energy during the virtual growth of cracks and displacements of their faces were compared. It turned out that the difference between the data calculated by the program and the exact values does not exceed 4% on average, with a maximum deviation of up to 13% in some cases.

**Keywords:** discontinuous displacement method, axisymmetric cracks, calculation accuracy

### ***Введение***

Численный метод граничных элементов широко применяется при расчетах напряженного состояния горных пород применительно к задачам горного дела. В целях оптимизации процессов разрушения в технологиях добычи полезных ископаемых особое значение имеет метод разрывных смещений [1, 2]. Связано это с тем, что при этом методе наиболее просто описывается развитие трещин, характерных при разрушении хрупких горных пород. В работах [3-6] приведены примеры таких расчетов развития трещин при взрыве и гидроразрыве. Для расчетов развития осесимметричных трещин в этих работах разработан численный

метод разрывных смещений. Аналогичный метод для случая плоского деформирования ранее был разработан С. Краучем и А. Старфилдом [1] и широко используется в настоящее время как один из методов граничных элементов в механике твердого тела. Подобный подход к решению задач плоской теории упругости с криволинейными трещинами предложен Л. И. Слепяном [7], где определение поля напряжений в теле с трещиной сведено к решению системы интегральных уравнений относительно раскрытия трещины. Идея метода заключается в аппроксимации поверхности трещины совокупностью дислокационных петель с неизвестными скачками смещений  $\vec{b}_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ). Каждая такая петля, с постоянным скачком смещений, порождает в безграничном упругом пространстве поле, называемое полем дислокационной петли с вектором Бюргера  $\vec{b}_k$  [8]. Из таких полей и складывается решение задачи о трещине.

Для определения напряженного состояния упругого пространства с осесимметричными трещинами их поверхность разбивается параллелями и меридианами на дислокационные площадки, раскрытия и сдвиги берегов которых описываются векторами Бюргера. Чтобы найти компоненты векторов Бюргера, строится система линейных уравнений из условия выполнения граничных условий на трещинах. Коэффициенты такой системы рассчитываются с использованием формул Пича – Келлера [8], выражающих компоненты тензора напряжений через смещения на дислокационных площадках (1). Решение системы уравнений позволяет определить искомое напряженное состояние упругого пространства вокруг осесимметричных трещин. Изложенный алгоритм был использован при разработке программы ASDD-T в работе [3].

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} d\xi \left[ \vec{b}_y \left( 3L \frac{ZX^2}{R^5} - M \frac{Z}{R^3} \right) - \vec{b}_z \left( 3L \frac{YX^2}{R^5} - M \frac{Y}{R^3} \right) \right] + \\
& + d\eta \left[ \vec{b}_z \left( 3L \frac{X^3}{R^5} - L \frac{X}{R^3} \right) - \vec{b}_x \left( 3L \frac{ZX^2}{R^5} + L \frac{Z}{R^3} \right) \right] + \\
& + d\zeta \left[ \vec{b}_x \left( 3L \frac{YX^2}{R^5} + L \frac{Y}{R^3} \right) - \vec{b}_y \left( 3L \frac{X^3}{R^5} - L \frac{X}{R^3} \right) \right] \\
\sigma_{yz} = & \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} d\xi \left[ \vec{b}_y \left( 3L \frac{YZ^2}{R^5} - L \frac{Y}{R^3} \right) - \vec{b}_z \left( 3L \frac{ZY^2}{R^5} - L \frac{Z}{R^3} \right) \right] + \\
& + d\eta \left[ \vec{b}_y \left( \mu \frac{X}{R^3} \right) + \vec{b}_z \left( 3L \frac{XYZ}{R^5} \right) - \vec{b}_x \left( 3L \frac{YZ^2}{R^5} - N \frac{Y}{R^3} \right) \right] + \\
& + d\zeta \left[ \vec{b}_z \left( -\mu \frac{X}{R^3} \right) + \vec{b}_x \left( 3L \frac{ZY^2}{R^5} - N \frac{Z}{R^3} \right) - \vec{b}_y \left( 3L \frac{XYZ}{R^5} \right) \right]
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $(\xi, \eta, \zeta)$  - точки на контуре дислокации;  $R$ - расстояние между точкой наблюдения  $(x, y, z)$  и точкой контура;  $(X, Y, Z)$  - разность координат точки наблюдения и точки контура;  $(L, M, N)$  - параметры, определяемые упругими модулями Ламе,

$$L = \frac{2\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu}, M = \frac{2\mu^2}{\lambda + 2\mu}, N = \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Остальные компоненты тензора напряжений получаются циклической перестановкой координат и компонент вектора Бюргерса.

### **Методы и материалы**

Для любого численного метода важно определять погрешность получаемых результатов. Оценку таких погрешностей можно получать из сравнения данных расчетов с результатами аналитических решений задач, в которых такие решения существуют, или с численными решениями задач, где высокая точность гарантирована. Ясно, что при конечном числе площадок на которые разбивается трещина решение приближенное. Оправдание использования такого подхода — широкая практика применения методов граничных элементов, обзор которых приведен в [2] и хорошее соответствие аналитическим решениям тестовых задач. В частности, разработанные программы тестировали на аналитических решениях задачи о дисковой трещине в безграничном пространстве, берега которой нагружены осесимметрично [7].

В настоящей работе решения задач по программе ASDD-T [3] определения НДС в окрестности нагруженных осесимметричных трещин методом разрывных смещений сравниваются с известными точными решениями двух задач.

### **Результаты**

В первой задаче речь идет о напряженном состоянии упругого пространства с осесимметричной трещиной, представляющей из себя часть сферической поверхности (рис.1) . Предполагается, что упругое пространство растянуто на бесконечности трехосным полем напряжений  $\sigma_{zz}^0 \geq 0, \sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0 \geq 0$

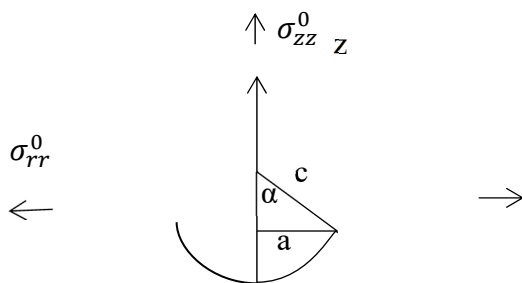


Рис. 1. Осевое сечение осесимметричной трещины, имеющей форму сектора сферической поверхности радиуса  $c$ , в поле внешнего растяжения

Существует аналитическое решение задачи о напряженном состоянии упругого пространства с такой трещиной [9], получаемое в результате сведения связанных интегро-дифференциальных уравнений к обычным. В частности, в случае  $\sigma_{zz}^0 = \sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0 = \sigma^0$  в работе [9] приводятся значения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I, K_{II}$  вблизи кромки трещины в зависимости от полуугла сферического сектора  $\alpha$ . Эти данные приведены в таблиц 1 в безразмерном виде, отнесенном к  $K_0 = 2\sigma^0 \sqrt{(c \sin \alpha) / \pi}$ . В программе ASDD –Т нет расчета коэффициентов интенсивности напряжений по отдельности. Равновесное состояние трещины оценивается согласно критерию Ирвина величиной интенсивности высвобождения механической энергии  $T$  при виртуальном удлинении трещины в меридианном сечении и увеличении ее площади. Согласно [10-11] величина  $T$  определяется через потенциальную энергию выражением  $T = \frac{-\partial U}{\partial S}$ , характеризующим изменение потенциальной энергии упругого тела  $U$  при увеличении площади трещины  $S$ . Такая величина находится численно через определенные смещения дислокационных площадок в результате расчетов двух напряженно деформируемых состояний нагруженной трещины: начального при заданной геометрии трещины и виртуального при небольшом увеличении ее длины в меридианном сечении и площади.

Величина интенсивности высвобождения механической энергии  $T$  при виртуальном увеличении трещины связана с коэффициентами интенсивности напряжений следующим выражением [11]:

$$T = \frac{(1-\nu^2)}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2)$$

Это выражение можно использовать для расчета  $T$  по значениям коэффициентов интенсивности напряжений работы [9], приведенных в таблице 1. Используя значение  $K_0 = 2\sigma^0 \sqrt{(c \sin \alpha) / \pi}$ , выражение (2) можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{T}{T_0} = (K_I/K_0)^2 + (K_{II}/K_0)^2, \quad T_0 = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_0^2 \quad (3)$$

Безразмерные значения интенсивности высвобождения механической энергии  $T$  при виртуальном увеличении трещины по данным работы [9] и расчетам по программе ASDD-Т задачи о напряженном состоянии осесимметричной трещины рис.1 приведены в 4-той и 5-той строке таблицы 1.

Таблица 1

$\alpha$ , градус	20	40	60	80	рассчитано
$K_I/K_0$	0.95	0.88	0.76	0.64	по [9]
$K_{II}/K_0$	0.15	0.26	0.35	0.44	по [9]
$T/T_0$	0.925	0.84	0.7	0.6	по [9]
$T/T_0$	0.93	0.88	0.7	0.52	по ASDD-Т

Отличие рассчитанных по программе ASDD-T значений  $T/T_0$  от точных при  $\alpha \leq 60^\circ$  не превосходит 5%, при разбиении дуги трещины на элементы через  $1^\circ$ , при  $\alpha = 80^\circ$  составляет 13% при разбиении через  $0.25^\circ$ . В последнем случае для более точного расчета потребуется дополнительное дробление дислокационного элемента.

Во второй задаче рассматривается напряженное состояние упругого пространства с цилиндрической трещиной радиуса  $R$  и длиной  $L$ , нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением  $p$  (рис.2).

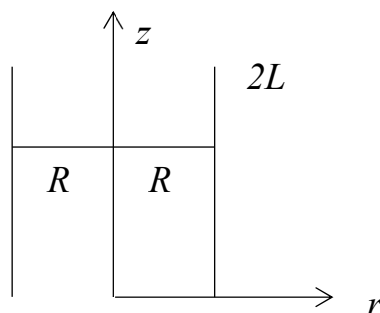


Рис. 2. Осевое сечение цилиндрической трещины длиной  $2L$  и диаметром  $2R$ , находящейся в упругом пространстве и нагруженной внутренним давлением  $p$

Эталонное численное решение этой задачи было получено методом распределенных дислокаций [12] в результате решения двух сингулярных интегральных уравнений. Такая же задача была решена в работе [13]. Некоторые результаты расчетов коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности кромок трещины работ [12-13] приведены в таблице 2 для разных значений отношения  $R/L$ . Значения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I, K_{II}$  приведены в безразмерном виде, отнесенном к величине  $K_0 = p\sqrt{\pi L}$ . Расчеты были проведены при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.3$

Таблица 2

R/L		Hills [12]	Gordeliy [13]	ASDD-T
0.1	$K_I/K_0$	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$	
	$K_{II}/K_0$	$5.4 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	
	$T/T_0$	0.032	0.032	0.032
1	$K_I/K_0$	$5.4 \cdot 10^{-1}$	$5.4 \cdot 10^{-1}$	
	$K_{II}/K_0$	$8.4 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-2}$	
	$T/T_0$	0.3	0.3	0.31
10	$K_I/K_0$	$9.8 \cdot 10^{-1}$	$9.7 \cdot 10^{-1}$	
	$K_{II}/K_0$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	
	$T/T_0$	0.96	0.94	1.0

Для оценки точности расчетов по программе ASDD-T были проведены расчеты задач в постановке рис.2, аналогичных рассмотренным в [12-13]. В результате расчетов определялись величины нормального раскрытия  $Dn$  и сдвигового смещения  $Ds$  вдоль образующей цилиндрической трещины и величина  $T$  высвобождения механической энергии, отнесенная к увеличению ее поверхности при удлинении. Значения интенсивности высвобождения механической энергии в безразмерном виде  $T/T_0$ , рассчитанные по формуле (3) с учетом  $K_0 = p\sqrt{\pi L}$ , приведены в таблице 2 для результатов расчетов проведенных в [12-13] и полученных по программе ASDD-T. Сравнение этих значений показывает их удовлетворительное соответствие, при котором отличие не превышает 4%. Такое же соответствие есть и в расчетах смещения берегов трещины. Так максимальное значение нормального раскрытия в расчетах [12] в безразмерном виде для случая  $R/L=1$  составило  $\frac{Dn \cdot E}{(1-\mu^2)pL} = 1.75$ , при этом согласно расчетам по программе ASDD-T:  $\frac{Dn \cdot E}{(1-\nu^2)pL} = 1.77$ . Для максимальных значений сдвигового смещения имеем по расчетам [12] и по программе ASDD-T: 0.2 и 0.182 соответственно. Отличия значений раскрытий трещины не превышает 11%

### ***Заключение***

В работе проведено тестирование программы ASDD-T, разработанной по методу разрывных смещений, для расчета развития осесимметричных трещин при взрыве ударе и гидроразрыве горных пород. Основным блоком программы ASDD-T является блок расчета напряженного состояния упругой среды, содержащей осесимметричные трещины. Такой блок был разработан по методу разрывных смещений, аналогичному предложенному С.Краучем и А.Старфилдом [1] Тестирование проведено на двух задачах с осесимметричными трещинами сферической и цилиндрической формы, имеющих точное решение. Сравнивались значения интенсивности высвобождения механической энергии при виртуальном росте трещин и смещений их берегов. Оказалось, что отличие рассчитанных по программе данных от точных значений не превосходит в среднем 4% с максимальным отклонением в отдельных случаях до 13%.

### ***Благодарности***

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и образования РФ (№ гос. регистра 121062200075-4).

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. S. L. Crouch and A. M. Starfield. Boundary element methods in solid mechanics, George Allen & Unwin, London, Boston, Sydney, 1983.
2. P. K. Benerjee and R. Butterfield. Boundary element method in engineering science, McGraw-Hill, London, 1981.
3. Шер Е.Н., Колыхалов И.В., Михайлов А.М. Моделирование развития осесимметричных трещин при множественном гидроразрыве // ФТПРПИ.– 2013.– №5.
4. Шер Е. Н., Михайлов А. М. Моделирование роста осесимметричных трещин при взрыве и гидроразрыве вблизи свободной поверхности // ФТПРПИ. — 2008. — № 5. — С. 53–62.

5. Шер Е. Н., Колыхалов И. В. Особенности последовательного развития близко расположенных трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2011. — № 6. — С. 45-55
6. Е.Н. Шер, А.М. Михайлов, А.Г. Черников Оценка размеров зоны хрупкого разрушения при взрыве сосредоточенного заряда вблизи свободной поверхности// ФТПРПИ. — 2011. — №6. — С. 37-44
7. L.I. Sleyan Models and phenomena in fracture mechanics. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
8. M. Peach and J. S. Koehler. The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them, Physical Review, 1950, Vol. 80, No. 3.
9. Martynenko, M.A., Ulitko, A.F. Stress state near the vertex of a spherical notch in an unbounded elastic medium // Soviet Appl. Mech.–1979. –№ 14, С. 911–918.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения, – М.: Наука, 1974
11. Слепян Л.И. Механика трещин.– Л.: Судостроение, 1981
12. Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N., Korsunsky, A.M., 1996. Solution of crack problems. The distributed dislocation technique. Solid Mechanics and its Applications, vol.44. Kluwer Academic Publ., Dordrecht
13. E. Gordeliy, E. Detournay Displacement discontinuity method for modeling axisymmetric cracks in an elastic half-space // International Journal of Solids and Structures, 2011, Volume 48, Issue 19, P. 2614-2629.

© Е.Н. Шер, И. В. Колыхалов, 2023