

*А. М. Коврижных<sup>1\*</sup>*

## **Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения горных пород на больших глубинах**

<sup>1</sup> Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск,  
Российская Федерация  
\* e-mail: amkovr@mail.ru

**Аннотация.** Показано, что критерий Кулона-Мора правильно предсказывает величины напряжений на пределе текучести и в момент разрушения, как для горных пород, так и для пластичных металлов. Установлено также, что если направления разрушения, связывать с характеристиками дифференциальных уравнений теории пластичности, основанной на поверхности Кулона-Мора, то получим хорошее соответствие результатов расчета с данными опытов при различных видах нагружения.

**Ключевые слова:** горная порода, пластичность, разрушение, сдвиг, дилатансия

*А. М. Kovrizhnykh<sup>1\*</sup>*

## **Modeling of Processes of inelastic Deformation and Fracture of Rocks at great depths**

<sup>1</sup> Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, Russian Federation  
\* e-mail: amkovr@mail.ru

**Abstract.** It is shown that the Mohr-Coulomb criterion correctly predicts the stress values at the yield point and at the moment of failure, both for rocks and ductile metals. It has also been established that if the directions of fracture are associated with the characteristics of the differential equations of plasticity thorium based on the Coulomb-Mohr surface, then we will obtain a good agreement between the calculation results and experimental data for various types of loading.

**Keywords:** rock, plasticity, fracture, shear, dilatancy

### ***Введение***

В геомеханике общепринятой является точка зрения, что грунты и горные породы при деформировании могут проявлять следующие механические свойства: дилатансия при сдвиге (пластическое разрыхление); разная сопротивляемость геоматериалов при растяжении и сжатии; изменения плотности и трещиноватости, вызванных ростом необратимой деформации. Хорошо известно, что эти свойства не выполняются для большинства пластичных металлов. Экспериментальные наблюдения в лабораторных и натуральных условиях показывают, что на больших глубинах хрупкие горные породы в объемном напряженном состоянии ведут себя как пластичные металлы (рис. 1). Таким образом, свойства хрупкости, пластичности, изменение плотности при сдвиге и разная сопротивляемость деформируемого тела растяжению и сжатию (внутреннее трение) зависят не только от самого материала, но и от условий нагружения [1-18].

Методы теории пластичности с успехом применяются в геодинамике. Геологические структуры, называемые разломами и трещинами, образуются под воздействием напряжений. Следовательно, из анализа феноменологии разломов и трещин можно сделать определенные выводы относительно поля напряжений в нетронутом массиве. Умение правильно определять направления разрушения на поверхностях выработок и скважин при известных условиях нагружения горного массива имеет большое прикладное значение для обратной задачи определения напряжений в породном массиве. В частности, по значениям давлений разрыва в различно ориентированных скважинах и ориентации трещин разрушения на соответствующих поверхностях обнажений можно более точно определять напряженное состояние в нетронутом массиве [16].

Перечисленные выше факты позволяют высказать предположение о том, что процессы необратимого деформирования и разрушения металлов, горных пород и строительных материалов могут быть описаны с помощью единой дилатансионно-сдвиговой механической модели [19-25].

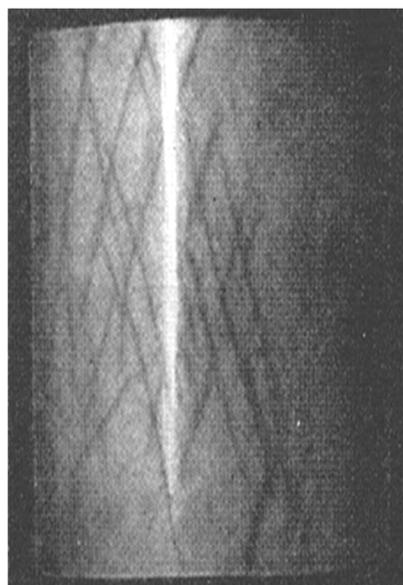


Рис. 1. Линии скольжения на мраморном образце [1]

В теории пластичности можно выделить два основных условия текучести. Первое берет начало с критерия, предложенного французским инженером Треска. Считается, что пластичность в металлах начинается, когда максимальное касательное напряжение достигает предельной величины, характерной для данного материала. Обобщением этого критерия для горных пород является критерий Кулона-Мора [1-7], и теория пластичности, в которой сдвиги происходят по соответствующим предельным плоскостям [19-25]. Второе направление в пластичности, основанное на интенсивности касательных напряжений, связано с условием Мизеса. В этой связи следует напомнить экспериментально обоснованный вывод Бриджмена (1952 г.) о том, что гидростатическое давление не влияет на текучесть пластичных металлов [1-7]. Но тогда пределы текучести при растя-

жени и сжатии должны быть одинаковыми, что согласуется с условием Мизеса. Однако это не противоречит тому, что нормальное напряжение, действующее на плоскости действия  $\tau_{max}$ , может влиять на начало текучести. И поэтому применение в этом случае критерия Кулона-Мора позволяет в пластичных металлах учитывать разную сопротивляемость при растяжении и сжатии.

Организация и проведение опытов, в которых на цилиндрических образцах реализуется состояние одноосного сжатия, представляет определенные трудности при моделировании и реализации таких экспериментов. В [1] приводятся результаты опытов на растяжение и сжатие (Зибель и Помп, 1927 г.), в которых авторы существенно улучшили испытания на сжатие, для получения равномерного распределения напряжений. Они предложили сжимать цилиндрические образцы между двумя конусами, образующие которых составляли с плоскостью давления угол, равный углу трения. Это позволило получить в образце чисто осевые сжимающие напряжения. Во всех случаях испытания в пластической области железа и малоуглеродистых сталей кривые для сжатия оказались расположенными выше соответствующих кривых для растяжения. Этот факт подтверждает разную сопротивляемость пластичных металлов растяжению и сжатию.

### ***О предельных состояниях и направлениях разрушения***

В дальнейшем будем считать, что для всех материалов на предельное значение максимального касательного напряжения в момент возникновения пластичности влияет нормальное напряжение на соответствующей площадке. Это означает, что как для хрупких, так и для пластичных материалов справедлив критерий Кулона-Мора, который имеет вид:

$$\max_n |\tau_n| + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = C, \quad (1)$$

где  $\tau_n$ ,  $\sigma_n$  – касательное и нормальное напряжения на предельных плоскостях,  $\varphi$  – угол внутреннего трения,  $C$  – коэффициент сцепления. Далее будем считать, что в общем случае и для металлов начало текучести следует связывать с условием (1), а пластическая деформация является результатом сдвигов по системам скольжения, которые совпадают с предельными плоскостями Кулона-Мора. При  $\varphi = 0$  из (1) получаем критерий текучести Треска, в этом случае пластическая деформация является результатом сдвигов в направлениях действия максимального касательного напряжения. Если учесть влияние нормального напряжения  $\sigma_n$  на предельное значение максимального касательного напряжения, то по известным пределам текучести при растяжении  $\sigma_t$ , сжатии  $\sigma_c$  и кручении  $\tau_0$  из (1) получим:

$$\varphi = \arcsin \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}, \quad \varphi = \arcsin \left( 2 \frac{\tau_0}{\sigma_t} - 1 \right). \quad (2)$$



Далее будем также считать, что растягивающие напряжения положительны, а сжимающие – отрицательны. Условие (1) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 2C \cos \varphi \quad (4)$$

Если  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  разных знаков, то подобно случаю плоской деформации для плоского напряженного состояния предельное условие достигается на площадках, перпендикулярных к плоскости (1,3), проходящих через ось 2 и составляющих с направлением  $\sigma_1$  углы  $\theta = \pm(\pi/4 + \varphi/2)$ . Для режимов *AB* и *DE* данные направления совпадают с характеристиками поля напряжений, линиями скольжения. Для скоростей пластической деформации в состоянии неполной пластичности имеем зависимости [22-25]:

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi}{2} \dot{\gamma}, \quad \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \dot{\epsilon}_3 = \frac{\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi}{2} \dot{\gamma}. \quad (5)$$

Применяя уравнение неразрывности [8] и (5), получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho v_{i,i} = -\rho(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) = -\rho \alpha \frac{d\gamma}{dt} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha d\gamma. \quad (6)$$

Интегрируя (6) при постоянном коэффициенте дилатансии  $\alpha$  и учитывая, что при  $t = 0, \gamma = 0, \rho = \rho_0$ , определим зависимость изменения плотности от пластического сдвига  $\gamma$ . При разрушении сдвиг  $\gamma = \gamma_*$  и плотность  $\rho = \rho_*$  одновременно достигают критической величины:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\exp(\alpha\gamma)}, \quad \rho_* = \frac{\rho_0}{\exp(\alpha\gamma_*)}$$

В (5, 6) точка означает производную по параметру нагружения,  $\alpha$  - коэффициент дилатансии,  $\dot{\gamma}$  - пластический сдвиг, который находится при решении задачи. При определении направлений характеристик и сравнении с результатами опытов для однородных напряженных состояний нет необходимости получать полную систему дифференциальных уравнений для поля скоростей, для этого достаточно (5) записать в произвольной системе координат ( $x, z$ ):

$$(a \cos 2\theta - b) \dot{\epsilon}_x + (a \cos 2\theta + b) \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (7)$$

где  $\theta$  - угол, который составляет 1-е главное направление с осью  $x$ ,  $a = 1 + \alpha \operatorname{tg} \varphi$ ,  $b = \alpha / \cos \varphi$  – параметры пластической модели. Предположим, что ось  $x$  совпадает с характеристикой поля скоростей, тогда  $\dot{\epsilon}_x = 0$ , и поэтому из (7) получим:

$$\cos 2\theta = -b/a = -\alpha/(\alpha \sin \varphi + \cos \varphi). \quad (8)$$

Таким образом, если направление характеристической поверхности гиперболической системы для поля скоростей связывать с поверхностью разрушения, то можно сказать, что коэффициент  $\alpha$  характеризует вид разрушения материала. При  $\alpha = 0$  из (8) получим  $\theta = \pm \pi/4$ , так разрушаются пластичные металлы. Подставляя в (8)  $\alpha = \operatorname{tg} \varphi$ , получим  $\theta = \pm (\pi/4 + \varphi/2)$ , так разрушаются полухрупкие металлы, например серый чугун [9]. В обоих случаях характеристики для поля скоростей и напряжений совпадают, так как в этих случаях сдвиговая модель приводит к ассоциированному закону течения для поверхности Кулона-Мора. Для  $\alpha = \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$  из (8) определим  $\theta = \pi/2$ , что соответствует хрупкому разрушению путем отрыва по плоскости перпендикулярной направлению  $\sigma_1$ . Далее рассмотрим режим  $CD$ , для которого  $\sigma_1 = \sigma_b = \sigma_t > \sigma_2 = \sigma_a > \sigma_3 = 0$ . Введем обозначения  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \sigma_t - \sigma$  и, применяя формулы преобразования, определим напряжения в произвольной системе координат  $(x, z)$ , подставляя которые в уравнения равновесия, получим систему двух дифференциальных уравнений для напряжений, имеющих следующее характеристическое направление:

$$dx \cos \theta + dz \sin \theta = 0. \quad (9)$$

Если предположить, что ось  $x$  является характеристикой, то из (9) следует, что  $dz = 0$  и поэтому  $\cos \theta = 0$ , а угол  $\theta = \pi/2$ . Это означает, что данная характеристика перпендикулярна направлению максимального напряжения  $\sigma_t$  и совпадает с направлением  $\sigma_2$ . Далее рассмотрим в плоскости (1,2) вывод уравнений для поля скоростей в режиме  $CD$  с применением сдвиговой модели [22-25]. Используя (5), в произвольной системе координат  $x, z$  получим:

$$(1 - \cos 2\theta) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (1 + \cos 2\theta) \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Предположим, что ось  $x$  совпадает с характеристикой поля скоростей, тогда  $\dot{\epsilon}_x = 0$ , а из (9) находим  $\theta = \pi/2$ .

Таким образом, в режиме  $CD$  характеристики для поля напряжений и скоростей ортогональны направлению 1, что соответствует результатам опытов Е. Дэвиса [1], представленным на рис. 3. Пять полых цилиндров из стали, подвергнутых испытанию на двухосное растяжение при следующих отношениях напряжений  $\sigma_b/\sigma_a = 0; 0,5; 1; 2; \infty$ , считая образцы слева направо. Аналогичным образом рассматривается режим  $BC$ , когда  $\sigma_1 = \sigma_a > \sigma_2 = \sigma_b > \sigma_3 = 0$  и в этом случае линии скольжения (разрушения) также перпендикулярны  $\sigma_t$  и хорошо согласуются с результатами опытов на образцах стандартных размеров, рис. 3.

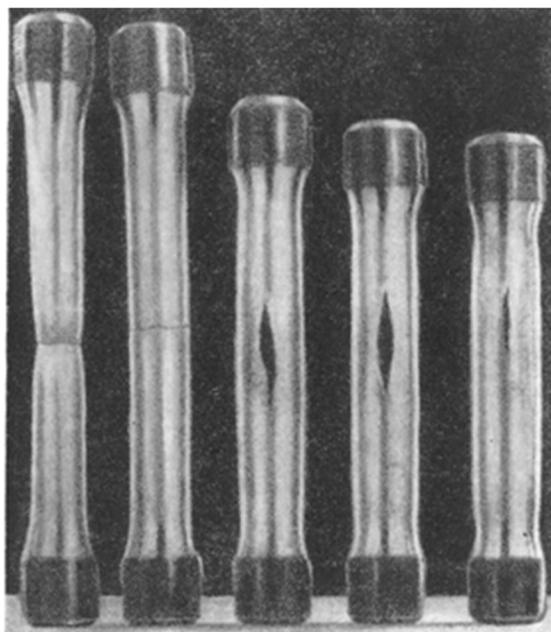


Рис. 3. Результаты испытания растяжением и внутренним давлением [1]



Рис. 4. Направления разрушения на образце известняка

Уравнения сдвиговой модели для поля скоростей в режимах *B* и *D* (рис.2) получены в [23] и для пластически несжимаемых металлов при  $\alpha = 0$  имеем  $\cos 2\theta = -1/3$ ,  $\theta = 54.7^\circ$ . Такой же результат для плоского напряженного состояния получается с применением уравнений, основанных на условии текучести Мизеса [21, 24], как для поля напряжений, так и для поля скоростей. Это значение угла  $\theta$  для линий скольжения наблюдалось в опытах на широких плоских металлических образцах [1-7]. Сравнительный анализ результатов расчета с данными опытов в режимах *A*, *F* и *E* показывает их хорошее соответствие по предельным зна-

чениям напряжений и по направлениям разрушения горных пород, если их связывать с линиями скольжения [23, 24].

### ***Заключение***

Сравнивая качество совпадения результатов расчета с данными опытов по пределам текучести и направлениям разрушения можно заключить, что:

- в области растяжения с кручением критерий текучести Кулона-Мора с прямолинейной огибающей (и углом внутреннего трения  $\varphi \approx 9^0$ ) практически совпадает с условием Мизеса (см. рис. 2) и поэтому также хорошо подтверждается данными опытов Лоде, Тейлора и Квинни и др.;

- результаты опытов Зибеля и Помпа [1] подтверждают критерий Кулона-Мора, так как пределы текучести при растяжении и сжатии разные, но не подтверждают условие Мизеса, по которому  $\sigma_t = \sigma_c$ ;

- направления разрушения, наблюдаемые в опытах Дэвиса и приведенные на рис. 3, не согласуются с уравнениями пластичности и критерием Мизеса, но хорошо подтверждаются теориями пластического сдвига Треска и Кулона-Мора;

- определенные в опытах ИГД СО РАН направления разрушения на образцах известняка [21] (рис. 4) хорошо согласуются с теорией пластического сдвига, основанной на критерии Кулона-Мора [23, 24].

На основе вышеизложенного можно утверждать, что критерий Кулона-Мора правильно предсказывает величины предельных напряжений в начале пластичности и в момент разрушения, как для горных пород, так и для пластичных металлов. Установлено также, что если направления разрушения, связывать с характеристиками дифференциальных уравнений теории пластического сдвига для поля скоростей [22-24], основанной на поверхности Кулона-Мора, то получим хорошее соответствие результатов расчета с данными опытов на металлах и геоматериалах при различных видах нагружения.

### ***Благодарности***

Работа выполнена в рамках проекта «Исследование и моделирование поведения породного массива при физических воздействиях, модернизация и создание способов и средств мониторинга состояния породного массива при добыче полезных ископаемых в сложных горно-геологических условиях», номер №121052500138-4.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1954. – 648 с.
2. Разрушение. Т.2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975. – С. 336-520.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа. 1969. – 608 с.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.
6. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. – М.: МГУ, 1979. – 208 с.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Юрайт, 2021, 403 с.

8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. 536 с.
9. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов. – М.: Metallurgizdat. 1961. – Т.2, 416 с.
10. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1975. Т.1. 832 с.
11. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984, 232 с.
12. Райс Дж. Механика очага землетрясения. – М., Мир, 1982.- 217 с.
13. Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. - № 4. – с. 86 – 97.
14. Христианович С.А. Деформация упрочняющегося пластического материала // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. - № 2. – с. 148 -174.
15. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физ. - техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1974. – №3. – С. 130-133.
16. Шейдеггер А. Основы геодинамики. – М: Недра, 1987, 384 с.
17. Mogi K. Experimental Rock Mechanics. – Geomechanics Research Series Vol. 3, Balkema, 2007, 361 p.
18. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. – СПб: Наука, 2001, 343 с.
19. Коврижных А.М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. – С.140-146.
20. Коврижных А.М К теории пластичности учитывающей вид напряженного состояния при сложном нагружении // Известия АН СССР. МТТ, 1987, № 6, с. 98-106.
21. Коврижных А.М. Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса-Шлейхера ПМТФ. – 2004. - № 6. – с. 144 – 153.
22. Коврижных А.М. Об условиях локализации пластической деформации в металлах // Доклады АН РАН. 1996. – Т.351. №5. –С.630-632.
23. Коврижных А.М Об условиях гиперболичности уравнений теории пластического сдвига // Доклады АН РАН, 1999, т. 365, № 4, с.485-487.
24. Коврижных А.М. О жесткопластической модели деформирования и разрушения горных пород // ФТПРПИ. 2003. № 2. – С. 29-15.
25. Коврижных А.М. О единой сдвиговой модели в теориях пластичности, ползучести и разрушения горных пород// Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2021. Т 8, № 2. С.82-90.

© А. М. Коврижных, 2023