УДК 528.9
DOI 10.33764/2618-981X-2023-1-2-117-124

В. П. Вербная[1], Т. Е. Елшина[1]*

Интерполяция как метод получения картографических данных

[1]Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: vv_1506@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются методы полиномиальной интерполяции Лагранжа, используемые в картографии при масштабировании карт. А также изложен метод радиальной интерполяции Гауссовыми функциями. Рассмотрены проблемы связанные с погрешностью при увеличении размерности и трудности работы полиномами на нерегулярной сетке. Приведены примеры полиномиальной и радиальной интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, радиальные функции, полином Лагранжа, погрешность, карта, масштабирование, рельеф

V. P. Verbnaya[1], T. E. Elshina[1]*

Interpolation as a method for obtaining cartographic data

[1]Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
* e-mail: vv_1506@mail.ru

Abstract. The article discusses the Lagrange polynomial interpolation methods used in cartography when scaling maps. Also the method of radial interpolation by Gaussian functions is described. The problems associated with the error causea by increasing dimension and the difficulty of working with polynomials on an irregular grid are considered. Examples of polynomial and radial interpolation are given.

Keywords: interpolation, radial functions, Lagrange polynomial, error, map, scaling, relief

Введение

Рельеф является весьма важным элементом содержания карты, поскольку он определяет размещение других объектов местности (конфигурацию речной сети, расположение населенных пунктов и т. д.), отражает геологическую структуру местности, влияет на характер и степень хозяйственного освоения территории, тактику ведения военных действий. Поэтому методам точного и наглядного изображения рельефа на картах всегда уделялось особое внимание.

В компьютерном моделировании поверхностей рельефа используются методы интерполяции. Среди них применяются: полиномиальные, радиальные базисные функции, В-сплайны, сплайны Безье. Широкое применение они нашли в графических редакторах и в программах для создания карт.

Методы и материалы

Одним из приемов, применяемых для визуализации рельефа, является метод интерполяции, который может быть реализован либо полиномами, например, Лагранжа или Ньютона, который не всегда дает хорошие результаты. В частности, полином первой степени дает поверхность, составленную из линейных граней, ее представление имеет разрывы второго рода, такая интерполяция требует большого числа опорных точек. Полиномы второй степени не годятся из-за того, что трудно добиться гладкости стыковки на границе растра. Полиномам высоких степеней свойственны осцилляции, что особенно проявляется при интерполяции на большом числе узлов (опорных точек).

Помимо описанных проблем, существуют и другие:

1. Проблема размерности

$$\|f - f_n\| = O\left(n^{-\frac{r}{d}}\right), r - \textit{показатель гладкости}, \ d - \textit{размернсть},$$

$$n - \textit{количество точек или размер базиса}$$

Погрешность интерполяции полиномами зависит от размерности последних. Можно заметить, что с увеличением размерности, погрешность возрастет. Так, например, для того, чтобы получить в d- мерном случае такую же погрешность как и в одномерном, необходимо взять опорных точек в n^d больше, по сравнению с одномерным случаем.

2. Во многих задачах значения функции известны в точках не на структурированной сетке (рис.1).

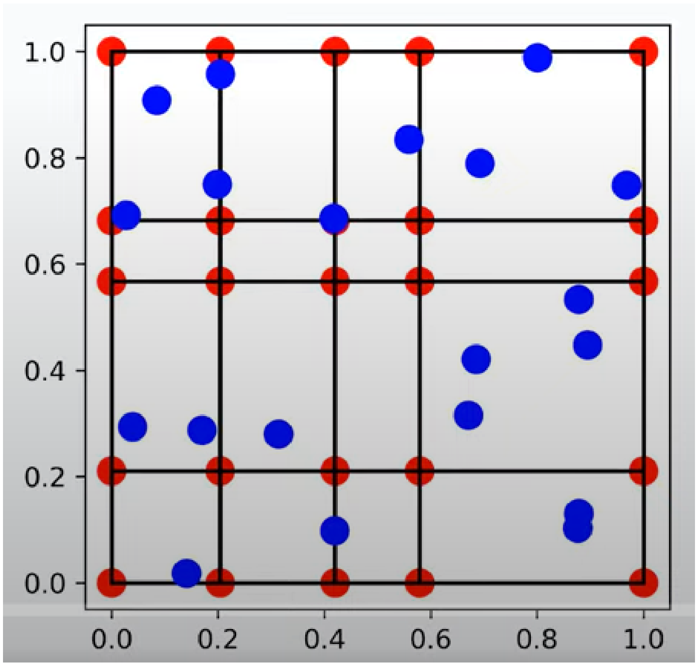

Рис.1. Неструктурированная сетка

В многомерных случаях полиномиальная интерполяция, в большинстве случаев, не применима.

Согласно теореме (Mairhubera-Curtis theorem) имеем, что для любого набора линейно независимых функций $\left\{\phi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right\}$, $k = 1, 2, ..., n,\ d > 1$ существует набор точек $x_1, x_2, ..., x_n$ при котором матрица $A = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) .... \phi_n(x_1) \\ ... \\ \phi_1(x_n) .... \phi_n(x_n) \end{pmatrix}$ является вырожденной.

Для одномерного случая эта матрица будет невырожденной для любых функций не только многочленов. Начиная с d=2 ситуация меняется, согласно данной теореме, если интерполянт является комбинацией линейно независимых функций, например полиномов, тогда матрица становится вырожденной хотя бы на одном из наборов точек. Это означает, что обычная интерполяция полиномами в этом случае не подходит.

Чтобы решить данную проблему надо функции ϕ_k выбрать таким образом, чтобы они зависели от набора точек, то есть использовать радиальные функции.

Функция $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется радиальной, если ее значение зависит только от нормы аргумента:

$$g(x) = \phi(\|x\|) = \phi(r),\ \phi : [0, \infty] \to \mathbb{R}. \qquad (1)$$

В данном случае имеется в виду норма вектора в Евклидовом пространстве. $\phi(\|x\|)$ далее называется радиальной базисной функцией (таб.1).

Таблица 1

Примеры РБФ

Радиальная базисная функция	$\phi(r)$	parameters
Гауссовы	$e^{-(cr)^2}$	c>0
Полигармонические сплайны	r^{2k-1}	$k \in N$
Мультиквардрики	$\sqrt{r^2 + c^2}$	c>0
Обратные мультиквардрики	$\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	c>0

Графики РБФ (рис. 2, 3)

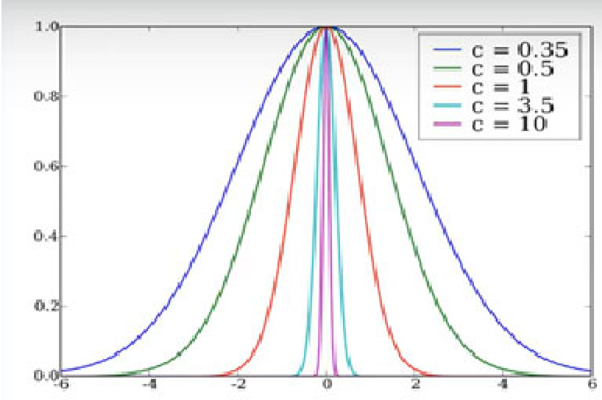

Рис. 2. Базисная функция Гаусса

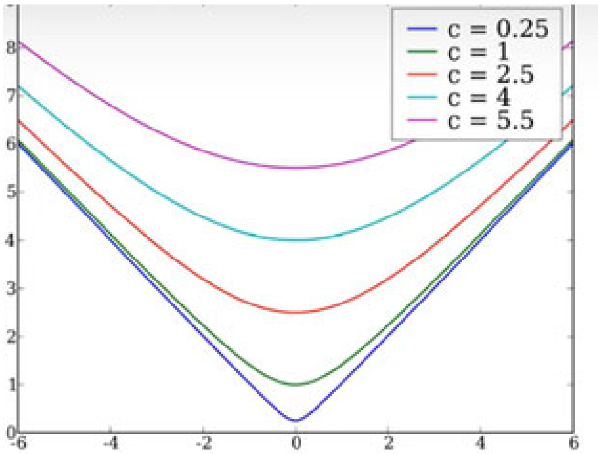

Рис. 3. Многоквадрическая базисная функция

Интерполянт РБФ имеет вид:

$$F(x,y)=\sum_{i,j=0}^{N}\lambda_i\phi\left(r_{ij}\right)\quad j=1,\dots,N\quad . \tag{2}$$

Допустим, у нас есть набор узлов $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, в которых известны значения функции $f(x,y)$. Мы хотим построить интерполяционный полином радиальных гауссовых функций для этой функции.

Радиальная гауссова функция для точки (x_i,y_i) будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi\left(\left\|(x_i,y_i)-(x_c,y_c)\right\|\right)=e^{-\left(\left\|(x_i,y_i)-(x_c,y_c)\right\|\right)^2\varepsilon^2} \tag{3}$$

Затем мы можем составить систему линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\left(\left\|(x_i, y_i)-(x_c, y_c)\right\|\right)^2 \varepsilon^2} = f\left(x_c, y_c\right);\\
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\left(\left\|(x_i, y_i)-(x_{c'}, y_{c'})\right\|\right)^2 \varepsilon^2} = f\left(x_{c'}, y_{c'}\right);\\
&\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\left(\left\|(x_i, y_i)-(x_{c''}, y_{c''})\right\|\right)^2 \varepsilon^2} = f\left(x_{c''}, y_{c''}\right),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\left(x_{c'}, y_{c'}\right), \left(x_{c''}, y_{c''}\right)$ – точки интерполяции.

Для определения весов система записывается в матричной форме. Для решения системы используется метод наименьших квадратов.

Рассмотрим два метода интерполяции. Допустим, у нас есть набор точек $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ и значения функции $f(x, y)$ в этих точках:

$$f(0,0)=1,\ f(1,0)=2,\ f(0,1)=3,\ f(1,1)=4.$$

Мы хотим построить интерполяционный полином радиальных гауссовых функций для этой функции с параметром ε.

Для этого мы можем составить систему линейных уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot e^{0} + \lambda_2 \cdot e^{-2\varepsilon^2} + \lambda_3 \cdot e^{-2\varepsilon^2} + \lambda_4 \cdot e^{-2^2 2\varepsilon^2} = 1\\
&\lambda_1 \cdot e^{-2\varepsilon^2} + \lambda_2 \cdot e^{0} + \lambda_3 \cdot e^{-2^2 2\varepsilon^2} + \lambda_4 \cdot e^{-2\varepsilon^2} = 2\\
&\lambda_1 \cdot e^{-2\varepsilon^2} + \lambda_2 \cdot e^{-2^2 2\varepsilon^2} + \lambda_3 \cdot e^{0} + \lambda_4 \cdot e^{-2\varepsilon^2} = 3\\
&\lambda_1 \cdot e^{-2^2 2\varepsilon^2} + \lambda_2 \cdot e^{-2\varepsilon^2} + e^{-2\varepsilon^2} + \lambda_4 \cdot e^{0} = 4
\end{aligned}
\right\} .
$$

Эту систему можно записать в матричной форме:

$$
\begin{pmatrix}
e^{0} & e^{-2\varepsilon^2} & e^{-2\varepsilon^2} & e^{-2^2 2\varepsilon^2}\\
e^{-2\varepsilon^2} & e^{0} & e^{-2^2 2\varepsilon^2} & e^{-2\varepsilon^2}\\
e^{-2\varepsilon^2} & e^{-2^2 2\varepsilon^2} & e^{0} & e^{-2\varepsilon^2}\\
e^{-2^2 2\varepsilon^2} & e^{-2\varepsilon^2} & e^{-2\varepsilon^2} & e^{0}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1\\ 2\\ 3\\ 4
\end{pmatrix}.
$$

Тогда решив систему при $\varepsilon = 5\cdot 10^{-1}$, находим веса λ_i:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,66\\ 0,47\\ 1,6\\ 2,7\end{pmatrix}.$$

Готовый интерполянт можно использовать для вычисления значений функции в любой точке (x, y).

$$F(x,y)=-0,66e^{-\left(x^2+y^2\right)\varepsilon^2}+0,47e^{-\left((x-1)^2+y^2\right)\varepsilon^2}+1,6e^{-\left(x^2+(y-1)^2\right)\varepsilon^2}+$$
$$+2,7e^{-\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)\varepsilon^2}$$

Погрешность

$$\delta=\frac{\left|f(x,y)-F(x,y)\right|}{\left|f(x,y)\right|}\quad. \tag{5}$$

достигается выбором масштаба ε .

При полиномиальной интерполяции применяется интерполяционный полином Лагранжа. Для функции двух переменных полином выглядит так:

$$L_{NM}(x,y)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} f_{nm}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{N}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{M}\frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_n-x_i)(y_m-y_j)}. \tag{6}$$

Для нахождения значений функции на промежутках $x\in[x_n, x_{n+1}], y\in[y_m, y_{m+1}]$ полином выглядит так [8]:

$$\begin{aligned}F(x,y)&=f_{nm}\frac{(x-x_{n+1})(y-y_{m+1})}{(x_n-x_{n+1})(y_m-y_{m+1})}+f_{n+1,m}\frac{(x-x_n)(y-y_{m+1})}{(x_{n+1}-x_n)(y_m-y_{m+1})}+\\ &+f_{n+1,m+1}\frac{(x-x_n)(y-y_m)}{(x_{n+1}-x_n)(y_{m+1}-y_m)}+f_{n,m+1}\frac{(x-x_{n+1})(y-y_m)}{(x_n-x_{n+1})(y_{m+1}-y_m)}.\end{aligned} \tag{7}$$

Полином Лагранжа при билинейной интерполяции выглядит так.

$$F(x,y)=b_1+b_2x+b_3y+b_4xy \tag{8}$$

Коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4 можно найти из решения системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f(Q_{11}) &= b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1 + b_4 x_1 y_1; \\ f(Q_{12}) &= b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_2 + b_4 x_1 y_2; \\ f(Q_{21}) &= b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_1 + b_4 x_2 y_1; \\ f(Q_{22}) &= b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2 + b_4 x_2 y_2. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 &= b_1; \\ 3 &= b_3; \\ 2 &= b_2; \\ b_4 &= -1. \end{aligned}$$

Полином имеет вид: $F(x, y) = 2x + 3y - xy$.

Далее была найдена абсолютная погрешность билинейного интерполирования:

$$\Delta z = \left|f'_x(x, y)\right| \Delta x + \left|f'_y(x, y)\right| \Delta y = 0{,}015 + 0{,}005 = 0{,}02.$$

Абсолютная погрешность вычислений при интерполяции функции двух переменных для дважды дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ на $x \in [x_0, x_n]$ и $y \in [y_0, y_n]$ вычисляется по формуле:

$$\left|R_1(x, y)\right| \le \frac{\left|(x - x_k)(x - x_{k+1})\right|}{2!} M_2 + \frac{\left|(y - y_r)(y - y_{r+1})\right|}{2!} N_2, \tag{9}$$

$$M_2 = \max\left|f''_{xx}(x, y)\right| \text{ на } x \in [x_0, x_n],$$
$$N_2 = \max\left|f''_{yy}(x, y)\right| \text{ на } y \in [y_0, y_n],$$

а при шаге h оценка остатка будет равна:

$$\left|R_1(x, y)\right| \le \frac{M_2}{2!} h^2 + \frac{N_2}{2!} h^2. \tag{10}$$

Задавая погрешность ε, можно получить из неравенства значение h, обеспечивающее необходимую точность вычислений:

$$h \le \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{M_2 + N_2}}. \tag{11}$$

Заключение

В данной статье раскрываются различные подходы интерполяции функции двух переменных, описывающих поверхность рельефа; рассматриваются проблемы, которые встречаются при использовании тех или иных методов, применяющихся в масштабировании карт [9], а также их реализации, используя конкретный пример. Важной частью статьи является определение погрешности при интерполировании и возможность добиваться нужной погрешности, с помощью выбора шага сетки полиноминальном интерполировании или выбора масштаба при радиальном интерполировании.

При интерполировании двумерных функций и функций более трех переменных рекомендуется применять радиальные базисные функции, в этом случае не нужна регулярная сетка и при получении нужной погрешности не надо вводить дополнительные узлы сетки. Что позволяет рекомендовать при картографировании горного рельефа использовать интерполирование радиальными базисными функциями, а при картографировании равнинного рельефа – билинейный полином Лагранжа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пошивайло, Я. Г. Принципы построения графов доступности при геоинформационном картографировании инфраструктуры населенного пункта / Я. Г. Пошивайло // Цифровая география : Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 т., Пермь, 16–18 сентября 2020 года. Том Том I. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. – С. 141-144. – EDN HVFBBK.

2.Интерполяция алгебраическими многочленами. Сплайн-интерполяция. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2022. – 65 с. – ISBN 978-5-9273-3305-9. – EDN OPZOHX.

3. Болотский, А. В. Интерполяция функций / А. В. Болотский // Университетское образование (МКУО-2016) : сборник статей XX Международной научно-методической конференции, Пенза, 07–08 апреля 2016 года / Министерство образования и науки РФ; Пензенский государственный университет. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2016. – С. 65-67. – EDN VZOBHB.

4. Груднов, И. А. Разработка программы полиноминальной интерполяции Лагранжа / И. А. Груднов, Г. А. Алексанян // Прикладные вопросы точных наук : Материалы V международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и преподавателей, Армавир, 30–31 октября 2021 года. – Армавир: Армавирский государственный педагогический университет, 2021. – С. 252-255. – EDN XLEICO.

5. Ромм, Я. Е. О библиотеке стандартных программ вычисления функций на основе кусочной интерполяции / Я. Е. Ромм, Г. А. Джанунц, Н. А. Медведкин // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – № 11. – С. 57-70. – DOI 10.17513/snt.39397. – EDN ABXDLX.

6. Патент № 2607260 C1 Российская Федерация, МПК G10L 19/07. системы и способы для определения набора коэффициентов интерполяции : № 2015139814 : заявл. 03.09.2013 : опубл. 10.01.2017 / В. Раджендран, С. Ш. Субасингха, В. Кришнан. – EDN UWKESZ.

7. Муравьев, К. А. Методы интерполяции при масштабировании изображений / К. А. Муравьев, А. С. Ильин, Ю. С. Невзорова // Технологии инженерных и информационных систем. – 2022. – № 3. – С. 36-45. – EDN DUNEVZ.

8. Huang A.M., Nguyen T. Correlation-based motion vector processing with adaptive interpolation scheme for motioncompensated frame interpolation // IEEE Transactions on Image Processing. 2009. V. 18. N 4. P. 740–752. doi: 10.1109/tip.2008.2010206.

9. Yan S., Yang A. Explicit algorithm to the inverse of Vandermonde matrix // 2009.

International Conference on Test and Measurement. Hong Kong, 2009. P. 176–179. https://doi.org/10.1109/ICTM.2009.5413083.