

Анализ возможностей повышения устойчивости алгоритмов решения СЛАУ

В. С. Крылов^{1,2}*

¹ Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация

² Западно-Сибирский филиал ФГУП «ВНИИФТРИ», г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: basnivova@mail.ru

Аннотация. В статье представлен анализ возможностей повышения устойчивости алгоритмов решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые используются во многих измерительных задачах. СЛАУ применяется при определении орбит навигационных спутников Земли, как объектов, движущихся в гравитационном поле массивного объекта. Автором проведен анализ полученных расчетов, и представлены соответствующие результаты.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, орбитальная группировка, эфемериды, траекторные измерения, уравнения измерений, начальные условия, инструментальные переменные, обусловленность

Analysis of possibilities of improving the stability of algorithms for solving SLAE

V. S. Krylov^{1,2}*

¹ Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

² West Siberian branch of FSUE "VNIIFTRI"

* e-mail: basnivova@mail.ru

Abstract. The article presents an analysis of possibilities of improving the stability of algorithms for solving of systems of linear algebraic equations (SLAE), which are used in many measurement problems. SLAE is used to determine the orbits of the Earth's navigation satellites as objects moving in the gravitational field of a massive object. The author analyzed the obtained calculations and presented the corresponding results.

Keywords: artificial Earth's satellite, orbital group, ephemeris, measurements trajectory of motion, equation of measurements, instrumental variables, conditionality

Введение

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используются во многих измерительных задачах. Относительно исследований автора, решение СЛАУ применяется при определении орбит навигационных спутников (НС) Земли, как объектов, движущихся в гравитационном поле массивного объекта [1].

Методы и модели

СЛАУ как правило записываются в матричной форме (1).

$$Ax = B. \quad (1)$$

Чтобы оценить, как погрешности исходных данных влияют на точность решения СЛАУ, надо вычислить особую характеристику матриц, которую называют обусловленностью [2]. Обусловленность матрицы можно оценить с помощью величины, называемой числом обусловленности $\mu(\mathbf{A})$.

$$\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|, \quad (2)$$

где $\|\mathbf{A}\|$ – норма матрицы \mathbf{A} ; $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ – норма обратной матрицы.

Чем больше $\mu(\mathbf{A})$, тем сильнее сказываются погрешности в исходных данных на решении СЛАУ. Если число $\mu(\mathbf{A})$ велико, то система считается плохо обусловленной. Можно дать оценку снизу меры обусловленности. Число обусловленности $\mu(\mathbf{A})$ не может быть меньше 1. Матрица, а соответственно и система, будет хорошо обусловленной, если $\mu(\mathbf{A})$ стремится к единице [3].

Задача поиска устойчивости алгоритма решения СЛАУ сводится к улучшению обусловленности матрицы за счет линейных преобразований. Методы преобразования связаны с методами получения исходной информации и методами повышения точности измерений (рис. 1).



Рис. 1. Методы повышения точности измерений

Результаты

В подавляющем большинстве случаев построение эффективных моделей движения НС включает в себя задачу оценивания расширенного вектора состояния динамической системы [4], путем решения системы алгебраических уравнений вида

$$U(t) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Y}(t) + \delta(t) \quad (3)$$

с неточно заданной правой частью $\delta(t)$ относительно расширенного вектора состояния системы \mathbf{x} . Здесь $\mathbf{Y}(t)$ – вектор траекторных измерений по сети станций БИС. При этом погрешность оценивания \mathbf{x} зависит в равной мере от величины модуля вектора $\delta(t)$ – факторов влияющих на точность траекторных измерений.

- X зависит от Y , но и Y зависит от X
- Как разорвать эту связь?
- Допустим, есть переменная Z , которая влияет на X и не влияет (напрямую) на Y
- Тогда удастся оценить причинно-следственную связь X с Y

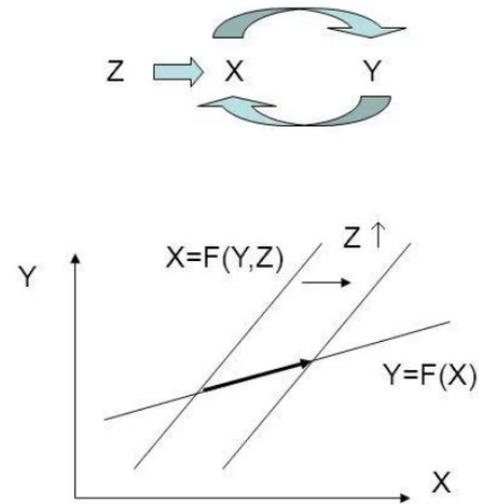


Рис. 2. Метод инструментальных переменных

Для решения поставленной задачи выбран метод инструментальных переменных [5], т.к. факторы регрессионной модели не удовлетворяют условию экзогенности (рис. 2). В этом случае оценки метода наименьших квадратов являются смещенными и несостоятельными (рис. 3).

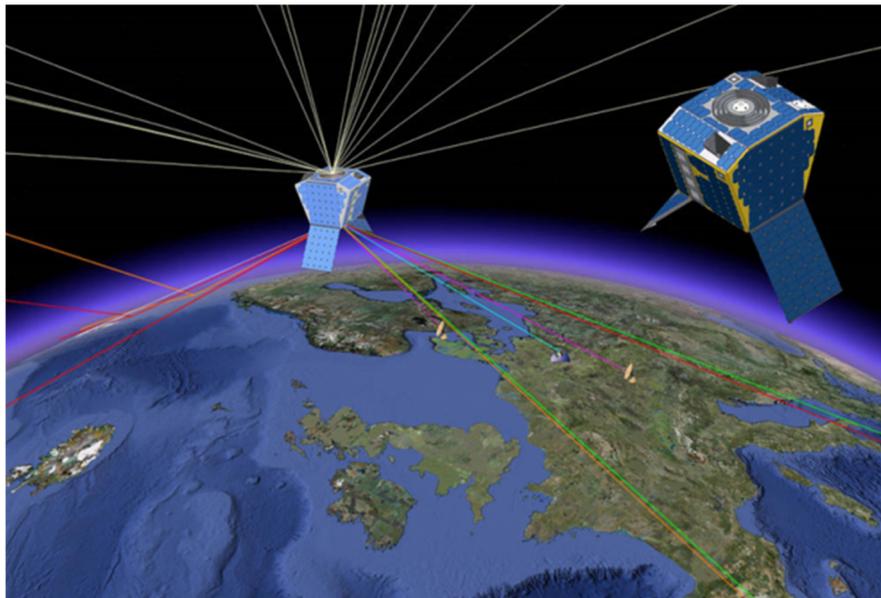


Рис. 3. Схематичное представление расположения спутников

В ходе изучения возможностей применения метода инструментальных переменных для решения задачи траекторных измерений был предложен следующий вариант модели в виде системы изохронных уравнений:

$$\begin{cases} Y = \alpha_0 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \varepsilon \\ R_1 = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_{21} + \beta_3 Z_{31} + u_1 \\ R_2 = \gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_{22} + \gamma_3 Z_{32} + u_2 \\ R_3 = \mu_0 + \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_{23} + \mu_3 Z_{33} + u_3 \end{cases}, \quad (4)$$

где R_i , $i = (1,3)$ – радиусы, измеренные соответственно на i -й точке (радиусы измеряются как Евклидово расстояние).

Введем инструментальную переменную

$$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

которая не коррелирует с ошибками и коррелирует с радиусами.

Обсуждение

Для иллюстрации описанного подхода был выполнен модельный эксперимент. В качестве данных для моделирования использовались начальные условия, полученные с FTP-сервера ИАЦ (файлы в формате SP3). Выбран один НС, находящийся в зоне радиовидимости сети БИС, расположенных на территории России. Для моделирования измерительной информации использовался программный имитатор ModBIS24 [9]. Имитатор ModBIS24 является удобным инструментом для анализа алгоритмов решения задач траекторных измерений.

В эксперименте сравнивались результаты наблюдений траектории НС от трех БИС.

1. НС наблюдался с трех БИС (Москва, Новосибирск, Хабаровск).
2. НС наблюдался с двух БИС (Москва, Новосибирск), дополнено наблюдением с БИС (Новосибирск) в момент времени t_i+15 минут.
3. НС наблюдался с одной БИС (Новосибирск), дополнено наблюдениями с БИС (Новосибирск) в моменты времени t_i+15 минут и t_i+30 минут.
4. НС наблюдался с одной БИС (Новосибирск) с дополнениями и инструментальной переменной вида (5).

Заключение

Устойчивость решения задачи определения орбиты НС из начальных условий $\mathbf{u}(t_0)$ характеризовалось числом обусловленности матрицы $U^T(t) \cdot U(t)$ для каждого эксперимента.

Результаты расчета чисел обусловленности приведены в табл. 1.

Результаты расчета

Эксперимент	Число обусловленности
1	167
2	176
3	160
4	122

Сравнение чисел обусловленности показало, что наблюдения с БИС, даже разнесенных по поверхности, не приводят к кардинальному улучшению решения задачи ЭБО. Положительный эффект, уменьшение числа обусловленности, обеспечивается применением метода инструментальных переменных даже при наблюдениях с одной БИС, что приводит к более устойчивому решению системы алгебраических уравнений вида (3).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.: МИР, 1964. – 513 с.
2. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Лаборатория знаний, 2006. – 523 с:
3. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Высшая школа, Минск 1976. – 720 с.
4. Справочное руководство по небесной механике. (Под ред. Дубошина Г.Н.) – М.: НАУКА, 1978. – 864 с.
5. Шебшаевич В.С. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.
6. Харисов В.Н., Перов А.И., Болдин В.А. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС. М.: ИПРЖР, 1998. – 400с.
7. ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Редакция 5.1. – М. РНИИКП. 2008 г.
8. Бартенев В.А, Гречкосеев А.К., Козорез Л.А., Красильщиков М.Н. и др. Современные и перспективные информационные ГНСС-технологии в задачах высокоточной навигации // Под ред. В.А. Бартенева, М.Н. Красильщикова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 192 с.
9. NAPEOS. Mathematical Models and Algorithms. Springer. 2009. – 150 p.
10. Толстиков А.С., Томилов А.С., Чубич В.М., Черникова О.С. Алгоритмические пути повышения точности координатно-временных определений. Доклады международного симпозиума «Метрология времени и пространства». – М., 2018.
11. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
12. Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В двух томах. – М.: Картгеоцентр, 2006.
13. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
14. Бартнев В.А., Гречкосеев А.К. Комбинированный алгоритм определения и прогнозирования параметров движения ИСЗ с использованием адаптации. Космические исследования. – 1986. – Вып. 4. – С. 564–574.
15. Владимиров В.М Гречкосеев А.К. Толстиков А.С. Имитатор измерительной информации для отработки эфемеридно-временного обеспечения космической навигационной системы ГЛОНАСС / Измерительная техника. – 2004. – № 8. – С. 12–14.