УДК 550.34
DOI 10.33764/2618-981X-2022-4-138-143

Двумерная краевая задача для одной переопределенной системы

М. В. Урев[1], *Х. Х. Имомназаров*[1]*, *И. К. Искандаров*[2]
[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация
[2] Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Аннотация. В полуплоскости R_+^2 рассматривается стационарная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и неоднородными краевыми условиями для двух скоростей. Данная система является переопределенной. Решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной системы для другой скорости. При надлежащем выборе функциональных пространств доказано существование и единственность обобщенного решения с соответствующей оценкой устойчивости.

Ключевые слова: Двухжидкостная среда, несжимаемая жидкость, уравнение Пуассона, переопределенная система, обобщенное решение, оценка устойчивости

A two-dimensional boundary value problem for one overdetermined system

M. V. Urev[1], *Kh. Kh. Imomnazarov*[1]*, *I. K. Iskandarov*[2]
[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation
[2] Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation
* e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Abstract. In the half-plane R_+^2, we consider a stationary system of the two-velocity hydrodynamics with one pressure and homogeneous divergent and inhomogeneous boundary conditions for two velocities. This system is overdetermined. The solution of this system is reduced to the sequential solution of two boundary value problems: the Stokes problem for one velocity and pressure and the overdetermined system for the other velocity. With an appropriate choice of function spaces, the existence and uniqueness of a generalized solution with an appropriate stability estimate has been proved.

Keywords: two-fluid medium, incompressible fluid, Poisson equation, overdetermined system, generalized solution, stability estimate

Введение

В полуплоскости $R_+^2 = \{\mathrm{x} = (x_1,\, x_2) \in R^2 :\, x_2 > 0\}$ с границей $S = \{(x_1,\, 0)\ :\, x_1 \in R\}$ рассматривается краевая задача для двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению. Решение данной задачи сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача

Стокса для $\mathbf{u}_1$ и p, а затем при найденном давлении p определяется скорость $\mathbf{u}_2$ как решение задачи [1-10]

$$\Delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \text{ в } R_+^2, \quad \mathbf{u}_2\big|_S = \mathbf{a}_2(x_1), \tag{1}$$

и условием ограниченности $\left|\mathbf{u}_2(x_1, x_2)\right|$ при $x_2 \to +\infty$, где $\mathbf{f}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \rho \mathbf{f})$, $\nu_2 -$ сдвиговая вязкость второй фазы, $\mathbf{f} = (f_1, f_2) -$ массовая сила.

Похожая задача возникает для стационарного магнитного векторного потенциала [11]. Обобщенное решение системы (1) в двухмерных неограниченных областях, в частности в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая [12]. Пусть $\omega(x_2) = 1/\big((3+x_2)\ln(3+x_2)\big)$, $L_{2,\omega}(R_+^2) = \left\{u \in D'(R_+^2) : \omega u \in L_2(R_+^2)\right\}$.

Для $u(\mathrm{x}) \in D(R_+^2)$ верно неравенство

$$\int_{R_+^2} \frac{u^2(x)}{(3 + x_2)^2 \ln^2(3 + x_2)} \, d\mathrm{x} \le 4 \int_{R_+^2} u_{x_2}^2 \, d\mathrm{x}, \tag{2}$$

доказательство которого аналогично доказательству неравенства (12) в работе [13, с. 25]. Введем в $D(R_+^2)$ скалярное произведение $[u, v] = \int_{R_+^2} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathrm{x}$. Из неравенства (2) видно, что действительно определяет скалярное произведение в $D(R_+^2)$, которому соответствует норма $\|u\|_{D(R_+^2)} = \sqrt{[u, u]}$.

Обозначим через $V_0^1(R_+^2)$ пополнение $D(R_+^2)$ в метрике $\|u\|_{D(R_+^2)}$, после чего $V_0^1(R_+^2)$ становится гильбертовым пространством со скалярным произведением $[u, v]$. После замыкания по норме пространства $V_0^1(R_+^2)$, неравенство (2) становится верным для $\forall u \in V_0^1(R_+^2)$.

Отметим, что на каждой линии $\Gamma_h = (x_2 = h)$ для п. в. $h > 0$ функция $u \in V_0^1(R_+^2)$ квадратично суммируема и $u = 0$ как элемент $L_2(S)$.

Введем гильбертово пространство $V^1(R_+^2)$:

$$V^1(R_+^2) := \left\{u \in D'(R_+^2) : u \in L_{2,\omega}(R_+^2), \nabla u \in L_2(R_+^2)\right\},$$

снабженное нормой

$$\|u\|_{1,\omega} = \|u\|_{L_{2,\omega}\left(R_+^2\right)} + \|\nabla u\|_{L_2\left(R_+^2\right)} \quad \forall u \in V^1\left(R_+^2\right).$$

Из определения пространства $V^1\left(R_+^2\right)$ и теоремы Фубини следует, что на каждой линии Γ_h для п. в. $h \geq 0$ функция $u \in V^1\left(R_+^2\right)$ квадратично суммируема.

Рассмотрим вопрос о следе функции $u \in V^1\left(R_+^2\right)$ на линии $x_2 = 0$. Пусть $a > 0$ и функция $\varphi_a(t) \in C^\infty([0,\infty))$ определяется как $\varphi_a(t) = 1$, если $0 \leq t \leq a$, $0 \leq \varphi_a(t) \leq 1$, если $t \in [a,\ 2a]$, $\varphi_a(t) = 0$, если $t \geq 2a$. Для каждой $u \in V^1\left(R_+^2\right)$ функция $u_a(x_1,\ x_2) = \varphi_a(x_2) u(x_1,\ x_2)$ принадлежит $H^1\left(R_+^2\right)$ и $\gamma_0 u_a$ –след u_a на S совпадает со следом $\gamma_0 u$ на S. По теореме о следах функций из $H^1\left(R_+^n\right)$ [14, с. 87] $\gamma_0 u = \gamma_0 u_a \in H^{1/2}(R)$ и

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(R)} \leq C \|u_a\|_{H^1\left(R_+^2\right)} \leq C_1 \|u\|_{V^1\left(R_+^2\right)}.$$

Справедлива также "обратная" теорема [14, с. 88], которая для нашего частного случая пространства $H^1\left(R_+^2\right)$ формулируется так: существует линейное ограниченное отображение

$$Z : H^{1/2}(R) \to H^1\left(R_+^2\right)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(R)$, то для $u = Zg$ имеем $\gamma_0 u = g$. Отсюда следует, что существует отображение

$$\tilde{Z} : H^{1/2}(R) \to V^1\left(R_+^2\right)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(R)$, то для $\tilde{u} = \tilde{Z}g$ имеем $\gamma_0 \tilde{u} = g$.

Обозначим через $\dot{\mathrm{J}}(R_+^2)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в R_+^2 соленоидальных векторов. В $\dot{\mathrm{J}}(R_+^2)$ введем скалярное произведение

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{R_+^2} \mathbf{u}_{\mathrm{x}} : \mathbf{v}_{\mathrm{x}}\, d\,\mathrm{x} = \int_{R_+^2} (\mathbf{u}_{x_1} \cdot \mathbf{v}_{x_1} + \mathbf{u}_{x_2} \cdot \mathbf{v}_{x_2})\, d\,\mathrm{x}.$$

Из (2) получим неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{2,\omega}(R_+^2)} \le 2\|\mathbf{u}_x\|_{L_2(R_+^2)} \qquad \forall \mathbf{u} \in C_0^\infty\left(R_+^2\right), \tag{3}$$

из которого следует, что $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ действительно определяет скалярное произведение в $\dot{J}(R_+^2) \subset C_0^\infty\left(R_+^2\right)$, которому отвечает норма

$$\|\mathbf{u}\|_{\dot{J}(R_+^2)} = \sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]} \equiv \|\mathbf{u}_x\|_{L_2(R_+^2)} \ .$$

Пусть $\mathbf{V}\left(R_+^2\right)$ есть пополнение $\dot{J}(R_+^2)$ по введенной норме. Отметим, что $\mathbf{V}\left(R_+^2\right)$ является замкнутым подпространством в $\mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right)=\left(V_0^1\left(R_+^2\right)\right)^2$. После замыкания по норме пространства $\mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right)$, неравенство (3) становится верным для $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right)$.

Обозначим через $\hat{\mathbf{V}}\left(R_+^2\right)$ замкнутое подпространство в $\mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right)$, определяемое как

$$\hat{\mathbf{V}}\left(R_+^2\right)=\left\{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right) : \operatorname{div}\mathbf{v}=0\right\} .$$

Хейвудом доказано [15, теорема 9], что $\hat{\mathbf{V}}\left(R_+^2\right)=\mathbf{V}\left(R_+^2\right)$ (в его обозначениях $J_0^*\left(R_+^2\right)=J_0\left(R_+^2\right)$).

Задачу (1) для $\mathbf{u}_2$ сведем к задаче с однородными граничными условиями для $\mathbf{v}_2$. Для этого представим $\mathbf{u}_2$ в виде суммы: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{z}_0^{(2)} + \mathbf{z}_1^{(2)}$. Функцию $\mathbf{v}_2$ определим, как решение следующей переопределенной задачи для векторного уравнения Пуассона с однороднымидивергентными и краевыми условиями:

$$\Delta\mathbf{v}_2 = -\mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } R_+^2, \quad \mathbf{v}_2\big|_S = 0, \tag{4}$$

где $-\mathbf{f}_2 = \nu_2^{-1}\left(\nabla p - \rho\mathbf{f}\right) - \Delta\mathbf{z}_0^{(2)} - \Delta\mathbf{z}_1^{(2)}$, $\mathbf{z}_0^{(2)} = \tilde{Z}\mathbf{a}_2 \in \mathbf{V}^1\left(R_+^2\right)$, а $\mathbf{z}_1^{(2)}$ – решение дивергентной задачи. и $\mathbf{z}_1^{(2)} \in \mathbf{V}_0^1\left(R_+^2\right) \subset \mathbf{V}^1\left(R_+^2\right)$. Для $\mathbf{z}_i^{(2)} \in \mathbf{V}^1\left(R_+^2\right)$ ($i = 0,1$) и $p \in L_2\left(R_+^2\right)$ линейные функционалы $\Delta\mathbf{z}_i^{(2)}$, ∇p, как показано выше, принадлежат $\mathbf{X}^* = \mathbf{V}^{-1}\left(R_+^2\right)$.

Таким образом, если $\mathbf{f} \in \mathbf{X}^*$ то в задаче (4) правая часть $-\mathbf{f}_2 \in \mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{V}^*(R_+^2)$. Обобщенное решение переопределенной задачи (4) следуя [12] и [13] будем искать в подпространстве $\mathbf{V}(R_+^2)$) соленоидальных векторных функций. Требуется найти $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}(R_+^2)$:

$$(\nabla \mathbf{v}_2, \nabla \mathbf{v})_{0,R_+^2} = < \mathbf{f}_2, \mathbf{v} >_{-1,1,R_+^2}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(R_+^2). \tag{5}$$

Имеем

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{0,R_+^2} = \left\| \mathbf{u} \right\|_{1,R_+^2}^2, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}(R_+^2),$$

то есть билинейная форма в левой части (5) $\mathbf{V}(R_+^2)$ – коэрцитивна. Правая часть в (5) есть линейный непрерывный функционал над элементами пространства $\mathbf{V}(R_+^2)$. Тогда по лемме Лакса-Мильграма задача (5) имеет единственное решение $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}(R_+^2)$ и

$$\left\| \mathbf{v}_2 \right\|_{1,R_+^2} \le C \left\| \mathbf{f} \right\|_{-1,R_+^2}.$$

Заключение

Доказано существование и единственность обобщенного решения и оценка устойчивости краевой задачи с неоднородными условиями для переопределенной системы уравнений Пуассона в полуплоскости. Такого вида задачи возникают, в частности, при рассмотрении двухмерных стационарной системы двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и неоднородными краевыми условиями Дирихле для двух скоростей фаз, а также в задачах электродинамики. При этом обобщенное решение для стационарной системы двухскоростной гидродинамики в случае двухмерных неограниченных областей, в частности, в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. При этом среда считается однородной и диссипация энергии происходит за счет сдвиговых вязкостей фаз подсистем. Другие эффекты будут рассмотрены в последующих работах. Массоперенос происходит за счет условий Дирихле и массовой силы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-15002).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Джураев Д., Имомназаров Х. Х., Урев М. В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тезисы республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа", 26-27 ноября 2015 г., Бухара, с. 197-198.

2. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Черных Е. Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, с. 60-66.

3. Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012., 212 с.

4. Жураев Д. А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х. Х., Урев М. В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде // УзбМЖ, 2016, No.3, с. 58-69.

5. Урев М. В., Имомназаров Х. Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, No 4. С. 425-437.

6. Baishemirov Z., Tang J.-G., Imomnazarov K., Mamatqulov M. Solving the problem of two viscous incompressible fluid media in the case of constant phase saturations // Open Engineering, 2020, v. 6, issue. 1, pp. 742 – 745.

7. Sarvar Kuyliev, Kholmatzhon Imomnazarov, and Ilham Iskandarov The regularity of a Stokes-type problem for a stationary system of the two-velocity hydrodynamics on the plane // AIP Conference Proceedings 2365, 070006, 2021.

8. Ulugbek Turdiyev and Kholmatzhon Imomnazarov A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure // AIP Conference Proceedings 2365, 070002, 2021.

9. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Урев М. В., Бахрамов Р. Х. Решение одной переопределенной стационарной системы типа Стокса в полупространстве // СибЖИМ, 2021. т. 24, No. 4, С. 54–63.

10. Урев М. В., Имомназаров Х. Х., Искандаров И. К. О краевой задаче для одной переопределенной системы в полуплоскости // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2021. XV Междунар. науч. конгр., 24–26 апреля 2019 г., Новосибирск : Междунар. науч. конф. «Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология»: сб. материалов в 9 т. Т. 4. – Новосибирск : СГУГиТ, 2019, с. 226-231.

11. Кремер И. А., Урев М. В. Решение методом конечных элементов регуляризованной версии

стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл.

математики / РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2010. Т. 13, № 1. С. 33–49.

12. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса. // Записки науч. сем. ЛОМИ, 1976, Т. 59, С. 81–116.

13. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. --М.: Изд. "Наука" 1970, 288 с.

14. Nečas J. Direct methods in the theory of elliptic equations.--Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

15. Heywood J.G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math., 1976, Vol. 136, p. 61–102.