УДК 517.95
DOI 10.33764/2618-981X-2022-4-93-101

Об одной обратной динамической задаче пороупругости для слоистой среды

Х. Х. Имомназаров[1], Л. Х. Хужаев[2], З. Ш. Янгибоев[3]*
[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Российская Федерация
[2] Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий, г. Карши, Узбекистан
[3] Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан
* e-mail: lochin-x@mail.ru

Аннотация. Рассматривается обратная динамическая задача пороупругости кусочно-гладкого коэффициента сдвига по дополнительной информации колебаний точек свободной поверхности. Считается, что выполнена гипотезы Гупилла о равном времени распространении возмущений по слоям насыщенной жидкостью пористой среды. Получены рекуррентные формулы для восстановления неизвестного коэффициента сдвига.

Ключевые слова: пороупругости, прямая задача, обратная динамическая задача, слоистой среды, гипотезы Гупилла, образы Фурье, комплексной плоскости

On one inverse dynamic problem of poroelasticity for a layered medium

Kh. Kh. Imomnazarov[1], L. Kh. Khujaev[2], Z. Sh. Yangiboev[3]*
[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, the Russian Federation
[2] Karshi branch of Tashkent University of Information Technologies, Karshi, Uzbekistan
[3] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan
* e-mail: lochin-x@mail.ru

Abstract. An inverse dynamic problem of poroelasticity of a piecewise-smooth shear coefficient is considered using additional information on oscillations of free surface points. It is believed that Goupill's hypothesis about the equal propagation time of perturbations through the layers of a liquid-saturated porous medium has been fulfilled. Recursive formulas for recovering the unknown shift coefficient are obtained.

Keywords: poroelasticity, direct problem, inverse dynamic problem, layered medium, Goupill's hypotheses, Fourier images, complex plane

Введение

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежит уравнение с частыми производными. Задачи о распространении волн различной природы в плоских слоисто--неоднородных средах возникают во многих физических исследованиях. Наряду с прямыми задачами могут быть поставлены обратные, заключающиеся в определении характеристик слоисто-неоднородных сред. Обратным задачам для гиперболических уравнений ввиду их широкого прикладного значения посвящена обширная литература (см., например, [1-4]). Среди этих задач большое практическое значение имеют обратные задачи электроразведки [5], магнитотеллурического зондирования [6], задачи интерпретации данных о дисперсии поверхностных сейсмических волн [7], [8], обратные динамические задачи сейсмики [9], [10], а также задачи синтеза слоистых покрытий [11].

В [12] получил рекуррентные формулы для определения кусочно-постоянного коэффициента волнового уравнения в рамках гипотезы Гупилла о равном времени τ распространения возмущения по плоскопараллельным слоям. В качестве дополнительной информации рассматривалось значение решения начально-краевой задачи (или его производной по времени) на свободной поверхности $x = 0$.

Наиболее близкой к предложенной является идея послойного определения коэффициента волнового уравнения путем последовательного анализа в точке $x = 0$ отраженного сигнала в моменты времени $2n\tau$. Измеренный в этот момент времени сигнал должен содержать информацию о первых $n+1$ слоях и при известных значениях коэффициента в первых n слоях позволяет определить искомую величину в $n+1$-м слое (см., например, [1, 13, 14]). Отметим также работы [15-19].

Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения колебаний в неоднородном по переменной x полупространстве, описываемый системой уравнением [20-24]

$$\rho_s(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho_l(x)b(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\right), x > 0, t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b(x)\big(u - v\big), \qquad x > 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

при следующих нулевых начальных условиях:

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0, \quad x > 0 \tag{3}$$

и граничном условие

$$u_x\,\big|_{x=0} = H(t), \qquad t > 0 \tag{4}$$

В формулах (1) и (2) функция $\mu(x)$ кусочно-постоянна и может иметь разрывы в точках $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k,}$, функции $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$, $b(x)$, т.е. полагая $a_0 = 0$, можно записать равенство

$$\mu(x)=\begin{cases}\mu_m & \text{для } x\in(a_{m-1},a_m), m=1,...,k\\ \mu_{k+1} & \text{для } x>a_k\end{cases}, \quad (5)$$

$$\rho_l(x)=\begin{cases}\rho_{lm} & \text{для } x\in(a_{m-1},a_m), m=1,...,k\\ \rho_{lk+1} & \text{для } x>a_k\end{cases}, \quad (6)$$

$$\rho_s(x)=\begin{cases}\rho_{sm} & \text{для } x\in(a_{m-1},a_m), m=1,...,k\\ \rho_{sk+1} & \text{для } x>a_k\end{cases}, \quad (7)$$

$$b(x)=\begin{cases}b_m & \text{для } x\in(a_{m-1},a_m), m=1,...,k\\ b_{k+1} & \text{для } x>a_k\end{cases}, \quad (8)$$

где $b_m, \mu_m, \rho_{lm}, \rho_{sm} = const.$

В точках разрыва a_m коэффициента $\mu(x)$ к условиям (3), (4) добавим условия сопряжения

$$[u]_{x=a_m}=\left[\mu(x)u_x\right]_{x=a_m}=0,\ m=1,...,\mathrm{k} \quad (9)$$

Задачу определения функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ удовлетворяющей равенствам (1)-(4), (9) при заданной функции $b(x)$, $\mu(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ вида (5)-(8), принято называть *прямой задачей.*

Основной предмет исследования настоящей работы составляет

Обратная задача A^1_μ. Определить коэффициент $\mu(x)$ уравнения (1), т.е. найти набор из $2k+1$ чисел $\{\mu_1,...,\mu_{k+1}; a_1,...,a_k\}$, если относительно решения задачи (1)-(4), (9) известна информация

$$\Phi(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}u_t(0,t)e^{-i\omega t}dt, \qquad \omega\in\Omega, \quad (10)$$

причем $\Omega -$ отделенный от нуля конечный интервал и функции $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ заданы. Далее будем для простоты считать, что функции $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ заданными постоянными.

Все дальнейшие построения будем проводить в предположении, что

$$\tau=\frac{a_1-a_0}{c_1}=\frac{a_2-a_1}{c_2}=...=\frac{a_k-a_{k-1}}{c_k} \quad (11)$$

и величина τ задана, $c_k=\sqrt{\mu_k/\rho_{sk}}$. Как отмечалось выше, в ряде случаев предположение (11) эквивалентно гипотезе Гупилла. Будем считать, что $|\Omega|>\pi/\tau$.

Отметим, что наличие *k* равенств (11) обратной позволяет говорит о восстановлении в рамках решения обратной задачи 1 лишь *k+1* констант. Будем считать, что это $\{c_1,...,c_{k+1}\}$.

Известно (см., например, [1, 4]), что прямая задача (1)-(4), (9) в случае слоистой среды связана следующей задачей для уравнения Гельмгольца с параметром:

$$U_{xx} + \omega^2 \tilde{B}^2(x,\omega)U = 0, \tag{12}$$

$$U_x(0,\omega) = h(\omega), \quad U_x - i\tilde{B}\omega U \to 0 \text{ при } x \to \infty, \tag{13}$$

$$\left[U\right]_{x=a_m} = \left[\mu U_x\right]_{x=a_m} = 0, \ m = 1,...,k. \tag{14}$$

Здесь $U(x,\omega),\ h(\omega) -$ образы Фурье соответственно функций *u* и *H*:

$$U(x,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt, \quad h(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$\tilde{B}(x,\omega) = \frac{\sqrt{(1+\rho_l(x)/\rho_s(x))b(x) - i\omega}}{c(x)\sqrt{b(x) - i\omega}}.$$

Дополнительная информация (10) для обратной задачи A_μ^1 определения коэффициента $\mu(x)$ будет соответствовать равенству

$$\Phi(\omega) = i\omega U(0,\omega), \quad \omega \in \Omega \tag{15}$$

Таким образом, решение обратной задачи A_μ^1 связано с решением следующей задачи.

Обратная задача A_μ^2. Определить коэффициент $\mu(x)$ вида (5)-(8) уравнения (12), если относительно решения задачи (12)-(14) известна информация (15).

Следуя [12] введем следующее

Определение. Обратную задачу A_μ^2 об определении функции $\mu(x)$ вида (5) по дополнительной информации (10) в рамках гипотезы (11) назовем *k-слойной.*

Если это не оговорено особо, всюду в дальнейшем будем рассматривать *k-слойную* задачу.

Воспользуемся явными формулами для общего решения уравнения (12) на участках постоянства функции $\mu(x)$ (a_{m-1}, a_m):

$$U(x,\omega) = A_1^m(\omega)e^{i\tilde{B}_m\omega x} + A_2^m(\omega)e^{-i\tilde{B}_m\omega x}. \tag{16}$$

Краевое условие (13) при $x \to \infty$ означает, что из бесконечности нет приходящих волн, т.е. $A_2^{k+1} = 0$. Для полупространства $x > a_k$ выполнено равенство

$$U(x,\omega) = Ae^{i\tilde{B}_{k+1}\omega x}, \tag{17}$$

где параметр $A(\omega)$ будет определен ниже.

Согласно (16) равенства (15) можно записать в виде

$$A_1^m e^{i\tilde{B}_m \omega a_m} + A_2^m e^{-i\tilde{B}_m \omega a_m} = A_1^{m+1} e^{i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m} + A_2^{m+1} e^{-i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m},$$
$$\mu_m \left(A_1^m e^{i\tilde{B}_m \omega a_m} - A_2^m e^{-i\tilde{B}_m \omega a_m} \right) = \mu_{m+1} \left(A_1^{m+1} e^{i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m} - A_2^{m+1} e^{-i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m} \right).$$

Отсюда, используя обозначения

$$B_j^m = A_j^m e^{(-1)^{j-1} i\omega \tilde{B}_m a_m}, \tag{18}$$

Легко получить, что в силу (7) справедливы равенства

$$B_1^m + B_2^m = B_1^{m+1} e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + B_2^{m+1} e^{i\omega\tilde{b}\tau}, \tag{19}$$
$$B_1^m - B_2^m = \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m}\left(B_1^{m+1} e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - B_2^{m+1} e^{i\omega\tilde{b}\tau} \right).$$

Здесь $\tilde{b} = \sqrt{\dfrac{(1+\rho_l/\rho_s)b - i\omega}{b - i\omega}}$.

Система (19) в обозначениях

$$\lambda_m^{\pm} = 1 \pm \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m} \tag{20}$$

эквивалентна равенствам

$$B_1^m = \frac{1}{2}\left(\lambda_m^+ B_1^{m+1} e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + \lambda_m^- B_2^{m+1} e^{i\omega\tilde{b}\tau} \right),$$
$$B_2^m = \frac{1}{2}\left(\lambda_m^- B_1^{m+1} e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + \lambda_m^+ B_2^{m+1} e^{i\omega\tilde{b}\tau} \right), \quad \mathrm{m} = 1,...,\mathrm{k}-1. \tag{21}$$

Для вычисления величин B_j^k используем равенства (13) в точке $x = a_k$, представление (17) и формулы (11), (16), (20). Полагая $\alpha = e^{i\omega\tilde{B}_{k+1}a_k}$, получим

$$B_1^k = \frac{1}{2} A\alpha\lambda_k^+, \qquad B_2^k = \frac{1}{2} A\alpha\lambda_k^-. \tag{22}$$

Функцию $A(\omega)$ определим из краевого условия (13) при $x=0,$ которое согласно (11), (16), (18) имеет вид

$$i\omega\tilde{B}_1(\mathrm{A}_1^1 - A_2^1) = i\omega\tilde{B}_1\left(B_1^1 e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - B_2^1 e^{i\omega\tilde{b}\tau}\right) = h(\omega). \tag{23}$$

Используя формулы (21), (22), можно сделать вывод о том, что

$$B_j^1 = \frac{A\alpha}{2^k}\mathrm{P}_j^{k-1}\left(e^{i\omega\tau}, e^{-i\omega\tau}\right), \tag{24}$$

где $P_j^{k-1}(\xi,\eta)$ – однородные полиномы степени $k-1$ переменных $\xi,\ \eta.$ Коэффициенты этих полиномов, в свою очередь, однородные полиномы степени k, состоящие из слагаемых вида $1^{\pm}\,2^{\pm}...\lambda_k^{\pm}$.

Согласно (23), (24) справедлив аналог равенства из [12]

$$\frac{A\alpha}{2^k} = \frac{h(\omega)}{i\omega\tilde{B}_1}\left(P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}\right)^{-1},$$

Но тогда для дополнительной информации (16) $\Phi(\omega) = i\omega U(0,\omega) = i\omega(A_1^1 + A_1^1)$ мы получим представление

$$\Phi(\omega) = \frac{h(\omega)}{\tilde{B}_1}\frac{P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}}{P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}}. \tag{25}$$

Наложим ограничение на функцию $h(\omega)$ (т.е. функцию $H(t)$ в терминах динамической постановки (1)-(4)). Пусть для некоторого $\omega_0 > 0$ функция $h(\omega)$ не обращается в нуль на отрезке $\left[\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau\right] \subset \Omega.$ В частности, если $H(t) = \delta(t)$ и $\Omega = R,$ то $h(\omega) = 1$ и приведенное выше условие выполнено при любых $\omega_0, \tau.$

Рассмотрим следующие коэффициенты Фурье функции $\Phi(\omega)/h(\omega)$:

$$\varphi_m = \int_{\omega_0}^{\omega_0+\pi/\tau} \Phi(\omega)h^{-1}(\omega)e^{-2i\omega m\tau}d\omega \tag{26}$$

Установим связь между числами φ_m и параметрами μ_m обратной задаче A_μ^2.

Для вычисления интегралов (26) используем замену переменных $z = e^{2i\omega\tau}$ $(dz = 2i\tau z d\omega),$ взаимно однозначно отображающую полуинтервал $\left[\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau\right]$ и ω на единичную окружность $|z| = 1$ комплексной плоскости z (интегрирование происходит в сторону возрастания $\arg z$).

Умножая числитель и знаменатель правой части (25) на функцию $e^{ki\omega\tau} = z^{k/2}$, получим, что функция $\tilde{B}_1\Phi(\omega)/h(\omega)$, которую в терминах переменной z мы будем обозначать через $F_k(z)$, является отношением двух полиномов степени k:

$$\mathrm{F}_k(\mathrm{z}) = \frac{f_0^{(k)} + f_1^{(k)}z + ... + f_k^{(k)}z^k}{g_0^{(k)} + g_1^{(k)}z + ... + g_k^{(k)}z^k}. \tag{27}$$

Здесь нижний индекс функции $F_k(z)$ и верхние индексы коэффициентов $f_j^{(k)}, g_j^{(k)}$ означают «слойность» задачи.

Равенства (26) в этих обозначениях принимают вид

$$\varphi_m = \frac{1}{2i\tau c_1}\int\limits_{|z|=1} F_k(z)\frac{dz}{z^{m+1}}, \qquad m = 0,...,\mathrm{k} \tag{28}$$

Предположим, что полином $g_0^{(k)} + g_1^{(k)}z + ... + g_k^{(k)}z^k$ не имеет корней в круге $|z| \le 1$. Достаточным условием для справедливости этого предположения в силу известной теоремы Руше [24] является неравенства

$$\left|g_0^{(k)}\right| > \sum_{j=1}^{k}\left|g_j^{(k)}\right|. \tag{29}$$

Итак, считаем, что подынтегральные функции в равенствах (28) внутри ограниченной контуром интегрирования области $|z| < 1$ имеют единственную особую точку-соответственно полюс порядка $m+1$ в точке $z = 0$. Это позволяет воспользоваться теоремой о вычетах [24], на основании которой

$$\varphi_m = \frac{\pi}{\tau\tilde{B}_1}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{F_k(z)}{z^{m+1}}.$$

Поскольку, как уже отмечалось, точка $z = 0$ является полюсом порядка $m+1$для рассматриваемой функции, коэффициенты Фурье (28) можно вычислять по формулам [24]

$$\varphi_m = \frac{1}{m!}\frac{\pi}{\tau\tilde{B}_1}F_k^{(m)}(0). \tag{30}$$

Прежде чем формулировать основной результат работы, введем некоторые обозначения (см.(20)):

$$\gamma_m = \frac{\lambda_m^-}{\lambda_m^+} = -\frac{\mu_{m+1} - \mu_m}{\mu_{m+1} + \mu_m}, \quad m = 1,...,k; \tag{31}$$

$$h_p^m = h_{m-1}^m h_{m-p-1}^{m-1} + h_p^{m-1}, \quad p = 0,...,m-2, m = 2,...,k$$

$$h_{m-1}^m = -\gamma_m, \quad m = 2,...,\mathrm{k} \tag{32}$$

$$h_0^1 = h_m^m = 0, \quad m = 1,...,k.$$

Теорема. *Пусть выполнены равенства (11), полином (27)* $g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + ... + g_k^{(k)} z^k$ *не имеет корней в круге* $|z| \le 1$ *и образ Фурье* $h(\omega)$ *функции* $\mathrm{H(t)}$ *не обращается в нуль для* $\omega \in [\omega_0, \omega_0 + \pi / \tau] \subset \Omega$. *Тогда для построенной по решению задачи (12)-(14) функции* $F_k(z)$ *(27) справедливы формулы*

$$F_k^{(m)}(0) = m! \left[2\gamma_m \prod_{p=1}^{m-1} (1 - \gamma_p^2) - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{h_p^m}{(m-p)!} F_k^{(m-p)}(0) \right]. \tag{33}$$

Причем коэффициенты γ_m, h_p^m *вычисляются согласно формулам (31), (32),* $m = 2,...,k$.

Доказательство теоремы проводится так же, как в [12].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир,1983
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука,1980.
3. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука,1984
4. Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
5. Тихонов А. Н. О единственности решения задачи электроразведки//Докл. АН СССР. 1949. Т. 19. № 6. С. 797-800.
6. Тихонов А. Н. О вариациях земного электромагнитного поля//Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 4. С. 547-550.
7. Гласко В. Б. К вопросу о единственности решения задачи восстановления структуры земной коры по дисперсионному спектру волн Рэлея//Докл. АН СССР. 1972. Т. 206. № 6. С. 1345-1348.
8. Гласко В. Б. О единственности некоторых обратных задач сейсмологии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10. № 6. С. 1465-1480.
9. Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофиз. данных. М.: Наука, 1967. С. 9-84 .
10. Романов В. Г. Обратные задачи распространения сейсмических и электромагнитных волн //Методы решения некорректных задач и их прилож. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. С. 111-118.
11. Гласко В. Б., Тихонов А. Н., Тихонравов А. В. О синтезе многослойных покрытий// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 1. С. 135—144.
12. Лаврентьев М. М. Обратная задача для волнового уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом // СМЖ, 1992, Т. 33, No. 3, с. 101-111.
13. Баев А. В. О решении обратной краевой задачи для волнового уравнения с разрывным коэффициентом // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. 1988.Т.28, № 11. С. 1619-1633

14. Гервер М. Л. Обратная задача для волнового уравнения с неизвестным источником колебаний. М.: Наука,1974

15. Белишев М. И., Куприянова Н. В. Об отражении плоской наклонной волны от слоистого полупространства периодического профиля // Акустический журн. 1983. Т.29, вып. 6. С. 733-735

16. Баев А. В. Об одной постановке обратной краевой задачи для волнового уравнения и итерационном методе ее решения//Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 4 С. 818-821 .

17. Баев А. В. О решении обратной задачи для волнового уравнения на отрезке методом последовательных приближений//Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1358-1361.

18. Белишев М. И. Восстановление профиля скорости в неоднородном слое по низкочастотной асимптотике коэффициента отражения // Акустический журн. 1986. Т.32, вып. 1. С. 8-14.

19. Карчевский А. Л. Восстановление продольной и поперечной скоростей и границ тонких слоёв в тонкослоистой пачке // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск, 2012.– Т. 15, No 1.– С. 67–82.

20. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // ФГВ. 1993. № 1. с.100-111.

21. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science Publishers Inc.,1995. 192p.

22. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. 2001. т.IV, №2(8). С.154-165.

23. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Рахмонов Т. Т., Янгибоев З. Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавк. матем. журн., 2013, том 15, No. 2, с. 45–57.

24. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного, М.: Физматгиз,1958.