

Сопротивление среды прониканию жесткого инструмента с учетом вязкости

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹*

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Российская Федерация

² Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Аннотация. Решается задача об определении сопротивления среды с учетом вязкого слагаемого по данным натурных измерений глубины проникания и времени до остановки при ударном воздействии. Построена система уравнений и получено решение для оценки параметров сопротивления. Проведена серия экспериментов по бросанию ручного копра в грунт.

Ключевые слова: жесткое тело, сопротивление среды, вязкость, глубина проникания, время до остановки

Medium resistance to penetration of a rigid tool, taking into account viscosity

A. I. Chanyshev^{1,2}, I. M. Abdulin¹*

¹ Chinakal Institute of Mining SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

² Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation
* e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Abstract. The problem of determining the resistance of the medium is solved, taking into account the viscous term according to the data of full-scale measurements of the penetration depth and time to stop under impact. A system of equations has been constructed and a solution has been obtained for estimating the resistance parameters. A series of experiments was carried out on throwing a hand-held pile driver into the ground.

Keywords: rigid body, medium resistance, viscosity, penetration depth, time to stop

Введение

Вопросы ударного погружения тел в массив пород исследовались в работах [1-10]. Одним из вопросов является оценка предельной нагрузки, необходимой для внедрения тела на заданную глубину [11-13]. Традиционная постановка задачи состоит в том, что задается математическая модель преграды в виде упругой, упругопластической среды, вязкой среды [13, 14]. При этом считаются известными все характеристики преграды, включая пределы пластичности, прочности и т.д. Далее задается геометрия внедряемого инструмента, инструмент может считаться деформируемым [15], недеформируемым (жестким) [16]. Задаются начальная скорость и начальное положение инструмента. Как правило, задачи такого типа решаются численно с привлечением конечно разностных схем

[11-14], с применением метода конечных элементов [17, 18]. При решении задачи находятся сила и другие параметры процесса внедрения, включая траекторию движения тела.

Сопротивление среды и его нахождение

В предлагаемой работе речь идет о сопротивлении среды внедрению. Оно зависит от формы внедряемого инструмента и от свойств среды [19, 20]. Можно изготовить инструмент с наконечником в виде звездочки, цилиндра, конуса, сферы. Понятно, что при одних и тех же начальных условиях результат будет различным. Его следует считать оптимальным, если сопротивление на одну и ту же глубину внедрения окажется минимальным. Вопрос: как определить сопротивление среды и как найти его, используя экспериментальные данные такие как, например, глубина проникания и время до остановки, не решая сложную математическую задачу.

Для решения задачи воспользуемся уравнением движения Ньютона:

$$m\ddot{x} = F - R. \quad (1)$$

где F – активная сила, R – сопротивление. Пусть дано движущееся тело с массой m , с начальной скоростью v_0 . До встречи с препятствием $F = R = 0$. В момент встречи с преградой вступает в действие сила R (сопротивление среды внедрению). Она останавливает тело, превращая его скорость в ноль. Если пренебречь упругим последствием в виде отскока (упругой разгрузки в месте взаимодействия тела с преградой), то тогда возможно измерить глубину проникания и время до остановки. В этом случае используется скоростная видеосъемка [5].

Приведем примеры сопротивления среды, используемые в [1, 21]. Функция R при $F = 0$ задается здесь в виде многочлена

$$R = B_1 v^2 + B_2 v + B_3,$$

где v – скорость, B_1, B_2, B_3 – постоянные, которые определяются экспериментально [1]. При $B_1 = B_2 = 0$ глубина проникания выражается уравнением

$$x_* = \frac{1}{2} \frac{m}{B_3} v_0^2,$$

где v_0 – начальная скорость в момент соприкосновения ударника со средой. При больших скоростях удара наряду с B_3 включается член $B_1 v^2$ и глубина проникания становится равной [1, 21]:

$$x_* = \frac{m}{2B_1} \ln \left(\frac{B_1}{B_3} v_0^2 + 1 \right).$$

Здесь не стоит задача определения сопротивления среды. Здесь сопротивление среды задается изначально, по нему находится глубина проникания. Перефразируем задачу. Пусть заданы параметры проникания (глубина), требуется найти сопротивление среды. Понятно, что если в сопротивление входит одна константа, то она легко определяется. Например,

$$B_3 = \frac{1}{2} \frac{m}{x_*} v_0^2.$$

При известной начальной скорости v_0 и глубине погружения x_* коэффициент B_3 определяется.

Отметим, что проблема отыскания сопротивления материалов через применение данных натуральных наблюдений возникает при оценке констант упругости массива пород. При этом модуль Юнга и коэффициент Пуассона вычисляются с использованием данных о продольных и поперечных скоростях волн, распространяющихся в массиве пород [22].

Рассмотрим случай, когда сопротивление среды R описывается зависимостью

$$R = a\dot{x} + bx + c, \quad (2)$$

где a, b, c – неизвестные параметры. Требуется с применением данных о глубине проникания, о времени остановки инструмента в массиве пород и начальной его скорости определить параметры a, b, c .

Для решения задачи подставим (2) в (1). Находим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0. \quad (3)$$

При обозначениях:

$$\alpha = a / 2m, \quad \beta = \sqrt{4bm - a^2} / 2m \quad (4)$$

решение (3) имеет вид

$$x = e^{-\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t] - c / b, \quad (5)$$

где $b \neq 0$. При $b = 0$ решением (3) служит выражение

$$x = C_1 + C_2 e^{-2\alpha t} - ct / a. \quad (6)$$

В (5) и (6) C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим (5). Дифференцируя, находим

$$\dot{x} = e^{-\alpha t} [\cos \beta t (\beta C_2 - \alpha C_1) - \sin \beta t (\alpha C_2 - \beta C_1)]. \quad (7)$$

Поставим начальную задачу. Считаем, что при $t = 0$

$$x|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_0. \quad (8)$$

Решая (6), (7) при условиях (8) имеем

$$C_1 = c / b, \quad C_2 = v_0 / \beta + \alpha c / \beta b. \quad (9)$$

Рассмотрим момент остановки инструмента. Это произойдет при $t = t_*$, удовлетворяющему уравнению

$$tg(\beta t_*) = \frac{\beta C_2 - \alpha C_1}{\alpha C_2 + \beta C_1} = \frac{v_0}{\alpha C_2 + \beta C_1} = \frac{v_0 \beta}{v_0 \alpha + c(\alpha^2 + \beta^2) / b}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (5), получаем глубину проникания

$$x_* = \frac{e^{-\alpha t_*}}{\sqrt{1 + tg^2(\beta t_*)}} [C_1 + C_2 tg(\beta t_*)] - \frac{c}{b}. \quad (11)$$

Пусть в уравнениях (10), (11) из экспериментальных наблюдений определяются величины t_* , x_* . Если считать неизвестными α , β , c / b , то система (10), (11) получается недоопределенной – имеются только два уравнения для нахождения трех переменных. Чтобы получить еще одно уравнение для определения c / b требуется провести другой эксперимент со значением начальной скорости v_1 . Тогда наряду с (11) будем иметь еще одно уравнение, содержащее величину c / b :

$$\frac{c}{b} \left\{ e^{-\alpha t_{**}} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} tg(\beta t_{**}) - \sqrt{1 + tg^2(\beta t_{**})} \right) \right\} = x_{**} \sqrt{1 + tg^2(\beta t_{**})} - \frac{v_1}{\beta} e^{-\alpha t_{**}}. \quad (12)$$

Таким образом вместе с (10), (11) получаем систему трех уравнений для определения трех неизвестных α , β , c / b .

Рассмотрим второй из представленных случаев при $b = 0$. Имеем

$$x = C_1 + C_2 e^{-2\alpha t} - \frac{c}{a} t, \quad \dot{x} = -2\alpha C_2 e^{-2\alpha t} - \frac{c}{a}. \quad (13)$$

Используя начальные условия (8), получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2\alpha C_1 - c/a = v_0. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c}{a} + v_0 \right). \quad (14)$$

Из (13), (14) время до остановки инструмента определяется выражением:

$$e^{2\alpha t_*} = 1 + v_0 a / c.$$

Тогда

$$t_* = \frac{1}{2\alpha} \ln \left(1 + v_0 \frac{a}{c} \right) \quad (15)$$

и глубина погружения будет равна

$$x_* = \frac{v_0}{2\alpha} - \frac{c}{a} t_*. \quad (16)$$

Пусть теперь x_* и t_* заданы. Требуется по этим данным найти сопротивление среды, т.е. найти параметры a и c .

Для их определения введем новую величину

$$z = av_0 / c. \quad (17)$$

С применением (17) перепишем (15), (16) как

$$t_* = \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + z),$$

$$x_* = \frac{v_0}{2\alpha} - \frac{v_0 t_*}{z} = v_0 t_* \left(\frac{1}{2\alpha t_*} - \frac{1}{z} \right).$$

Отсюда

$$2\alpha t_* = \ln(1 + z). \quad (18)$$

$$x_* = v_0 t_* \left(\frac{1}{\ln(1+z)} - \frac{1}{z} \right). \quad (19)$$

Таким образом из (19) получаем уравнение для определения z через известные из опыта величины v_0 , x_* , t_* :

$$\frac{1}{\ln(1+z)} - \frac{1}{z} = \frac{x_*}{v_0 t_*}. \quad (20)$$

График зависимости $x_* / v_0 t_*$ от переменной z представлен на рис. 1.

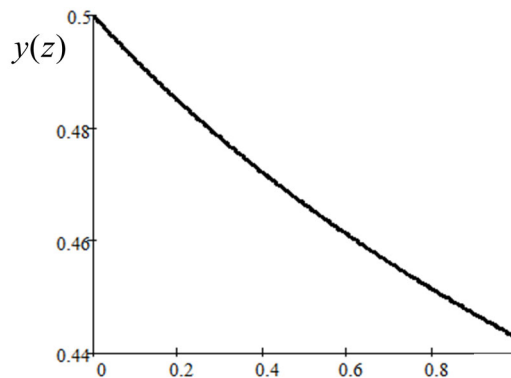


Рис. 1. График зависимости $y(z) = 1 / \ln(1+z) - 1 / z$

Из него видно, что безразмерная величина $x_* / v_0 t_*$ не должна превосходить значения 0.5. Если ввести в рассмотрение среднюю скорость движения тела (инструмента) как v_* , т.е. $x_* = v_* t_*$, должно быть выполнено условие $v_* < v_0 / 2$. При этом условии можно считать, что сопротивление среды описывается формулой (2) при условии $b = 0$. Как найти при этом a и c ? По данным эксперимента находят величины v_0 , x_* , t_* . Далее, по этим данным выстраивается отношение $x_* / v_0 t_*$. При известной правой части уравнение (20) служит для нахождения z . Как видно из рис. 1 решение для z всегда существует. При известном z на основании (4), (18) находим величину a :

$$a = 2m \ln(1+z) / t_*.$$

Зная z и a из (17) находим

$$c = av_0 / z.$$

Таким образом сопротивление среды восстановлено. Меняя формы окончников внедряемого устройства, можно проанализировать значения сопротив-

ления среды для них, выбрать оптимальную их них, которая доставляет наименьшее значение сопротивление среды внедрению.

Проведены натурные эксперименты по бросанию ручного копра в грунт. Копер массой 1.8 кг бросался с разных высот в грунт. Начальные скорости находились в пределах от 2.4 м/с до 5.4 м/с. Глубина проникания колебалась от 2 см до 5.3 см. Время до остановки копра находилась в пределах от 0.05 с до 0.099 с. При этих значениях параметров величина $x_* / v_0 t_*$ находится в пределах от 0.166 до 0.099. Приведем примеры расчетов параметров a и c с применением полученных экспериментальных данных.

Таблица

Примеры расчетов параметров a и c

x_* (м)	v_0 (м/с)	t_* (с)	a (кг/с)	c (кг/с ²)
0.02	2.4	0.05	424.09	2.824
0.03	3.4	0.06	404.93	1.616
0.04	4.2	0.07	376.314	1.051
0.042	4.8	0.08	412.45	0.207
0.053	5.4	0.099	367.15	0.082

Выводы

Решена задача об определении сопротивления среды с учетом вязкости.

Определены параметры сопротивления, позволяющие оптимизировать формы внедряемых инструментов.

Показано как по данным, измеренным на поверхности массива пород (глубина, время остановки) восстанавливаются сопротивление среды в массиве пород.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-17-00188).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольдсмит В. Удар: Теория и физические свойства соударяемых тел: Пер. с англ. – Стройиздат, 1965. – 448 с.
2. Abramson H. N., Plass H. J., Ripperger E. A. Stress wave propagation in rods and beams // Advances in applied mechanics. – 1958. – Т. 5. – С. 111-194.
3. Rankine W. J. M. XV. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1870. – №. 160. – С. 277-288.
4. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. - Comptes rendus. de l'Acad: – d. sc. d. Paris, 101, 1885.
5. Баландин В. В. и др. Установка для исследования процессов высокоскоростного соударения // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75. – №. 3. – С. 232-237.

6. Баландин В. В. и др. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – №. 2. – С. 15-23.
7. Сагомоян А. Я. Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 300 с.
8. Григорян С. С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Механика жидкости и газа. – 1993. – № 4. – С. 18-24.
9. Абузьяров М. Х., Баженов В. Г., Котов В. Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // ЖВМиМФ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 940-953.
10. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 157–191.
11. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. – 1980. – №. 3. – С. 126.
12. Бурого Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2005. – №. 1. – С. 45-87.
13. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, No 3.
14. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1967. С- 212-263.
15. Федоров С. В. К определению глубины проникания пористых ударников при гиперзвуковом взаимодействии // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77. – №. 10. – С. 131.
16. Баженов В. Г., Брагов А. М., Котов В. Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50. – №. 6. – С. 115-125.
17. Борискин О. Ф. Автоматизированные системы расчета колебаний методом конечных элементов. – Иркутского гос. ун-та, 1984.
18. Баженов В.Г., Зефиоров С.В., Кочетков А.В. и др. Пакет программ “Динамика_2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 67–72.
19. Баландин В. В. и др. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду //Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – №. 2. – С. 15-23.
20. Баландин В. В. и др. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду //Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – №. 2. – С. 15-23.
21. Allen W. A., Mayfield E. B., Morrison H. L. Dynamics of a projectile penetrating sand // Journal of Applied Physics. – 1957. – Т. 28. – №. 3. – С. 370-376.
22. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М. Мир. 1983. т.1, 880 с., т2., 519 с.

© А. И. Чанышев, И. М. Абдулин, 2022