

## Сопротивление среды прониканию жесткого инструмента

*А. И. Чанышев<sup>1\*</sup>, О. Е. Белоусова<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, г.Новосибирск, Российская Федерация  
\* e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

**Аннотация.** Предлагается оценивать эффективность проникающего действия инструмента по сопротивлению среды указанному действию – чем меньше сопротивление, тем эффективнее инструмент. Сопротивление среды возможно определить с применением нагружающих устройств жесткого типа, когда отслеживается величина погружения инструмента при постоянной его скорости. Другой способ – ударное нагружение с измерением глубины и времени достижения. В работе анализируется решение задачи в динамической постановке, при этом устанавливается сопротивление среды деформированию при заданной начальной скорости погружения инструмента, его массе, при известных значениях глубины и времени остановки. Сопоставляя сопротивление среды для разных вариантов заострения инструмента, выбирается то, которое доставляет минимальное значение сопротивления среды при внедрении на заданную глубину.

**Ключевые слова:** сопротивление материала, внедрение инструмента, начальная скорость, глубина и время до остановки

## Medium resistance to rigid tool penetration

*A. I. Chanyshev<sup>1\*</sup>, O. E. Belousova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Federal State Budgetary Institution of Science Institute of Mining named after N. A. Chinakal, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
Novosibirsk, Russian Federation  
\* e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

**Annotation.** It is proposed to evaluate the effectiveness of the tool penetrating by the medium resistance to this action – the lower the resistance, the more effective the tool. The medium resistance can be determined by using rigid-type loading devices, when the immersion rate of the tool is monitored at steady loading speed. Another method is shock loading with measuring the penetration depth and the time to reach the depth. The paper provides a solution to the problem in dynamic setting that is the medium resistance to deformation is set at a given tool mass, its initial speed of immersion, known values of penetration depth and time. Comparing the resistance of the medium for differently sharpened tools, the one that delivers the minimum resistance of the medium at penetration to a given depth is selected.

**Keywords:** material resistance, tool penetration, initial speed, depth and time to stop

### *Введение*

В механике движение тела описывается уравнением Ньютона. Задавшись начальной скоростью, начальным положением тела (задача Коши), зная приложенную силу и силу сопротивления, возможно найти траекторию движения тела,

момент окончания движения. В этой связи возникает задача, нельзя ли по переопределенным условиям – по начальной скорости, начальному положению тела, по его скорости в момент остановки, при известной глубине проникания восстановить сопротивление среды движению, приняв во внимание априори оценки сопротивления. Отметим, что аналогичные задачи, когда по переопределенным данным требуется восстановить, например, структуру, состояние тела, его свойства встречаются часто в горном деле. Восстановив сопротивление среды, становится возможным установить влияние геометрии на движение тела. При меньшем сопротивлении тело при одних и тех же начальных условиях продвинется дальше. Решению данной задачи – восстановления силы сопротивления движению тела с заданной геометрией при переопределенных начальных и граничных условиях посвящена данная работа.

Вопросы проникания твердых тел в деформируемые преграды и в том числе массивы пород интересовали исследователей с давних времен [1-20]. Во главу угла ставилось определение предельной нагрузки, оценки глубины проникания, рикошет, влияния геометрии на процесс внедрения. При этом применялись различные математические модели внедрения инструмента в ту или иную среду (изотропную, анизотропную, неоднородную), в статической и динамической постановках. Использовались упругая, упругопластическая, вязкопластическая модели среды. Решались задачи о вдавливании плоского штампа, внедрение жесткого клина, конических тел в полуплоскость и полупространство. В [4, 18] исследовалась задача о движении твердого тела в среде с заданными законами ее сопротивления.

### *Математическая модель*

Преследуется следующая цель – определение сопротивления среды внедрению в нее инструмента при известных значениях глубины и времени проникания. Как и в [4, 18], за основу принимается закон движения Ньютона

$$m\ddot{x} = F - R \quad (1)$$

где  $m$  - масса инструмента,  $F$  - активная сила, приложенная к телу,  $R$  - сопротивление среды движению,  $x$  - смещение,  $\ddot{x}$  - ускорение.

Рассмотрим (1). Оно – дифференциальное уравнение 2-го порядка. Если  $F$  - активная сила ( в простейшем случае пусть зависит от времени  $t$  ), тогда  $R$  - реакция или сопротивление среды движению. Для того, чтобы (1) было дифференциальным уравнением 2-го порядка необходимо в общем виде принять, что  $R$  в (1) есть функция переменных  $x, \dot{x}, t$  :

$$R = R(x, \dot{x}, t). \quad (2)$$

Частные случаи зависимости (2) следующие. Если  $R = R(t)$ , то это означает, что сопротивление  $R$  изменяется только со временем  $t$  (убывает или возрастает

что связано со «старением» среды или ее укреплени­ем). Если  $R = R(\dot{x})$ , то этот случай отвечает учету «вязкого» сопротивления среды. Если  $R$  зависит только от  $x$ , то тогда получаем то, что соответствует упругой реакции среды ( $R = \lambda x$ ) или, например, упругопластической, если разгрузка будет происходить упруго.

В (1) как правило известны как  $m$  и  $F$ . Что касается реакции или сопротивления среды движению, то оно (она) – неизвестная априори. Чтобы найти ее, других уравнений кроме (1) не существует. Из (1) следует, что  $R$  возможно найти, если проводить какие-либо эксперименты при условии  $\ddot{x} = 0$  или  $\dot{x} = const$ . В этом случае, измеряя величину  $F$ , можно найти  $R$

$$R = F, \quad (3)$$

то есть, измеряя  $F$ , мы одновременно измеряем  $R$ . На рисунке 1а представлена программа нагружения в плоскости  $x, t$ , где  $x$  - смещение,  $t$  - время. Она предполагает движение по прямой линии  $x = Ct$  для соблюдения условия  $\ddot{x} = 0$ , где  $C$  - константа. Эта программа нагружения достигается за счет соответствующего изменения силы  $F$  в зависимости от времени  $t$ : если по каким-то причинам происходит «сход» с траектории нагружения на рис.1а, то нагрузка  $F$  в последующие моменты времени должна либо снижаться, либо увеличиваться так, чтобы движение в плоскости  $x, t$  оставалось по прямой линии. Из этих зависимостей  $x = x(t)$ ,  $F = F(t)$  рис. 1б исключением времени  $t$  получается диаграмма изменения  $F$  как функции  $x$ , изображённой на рис. 2.

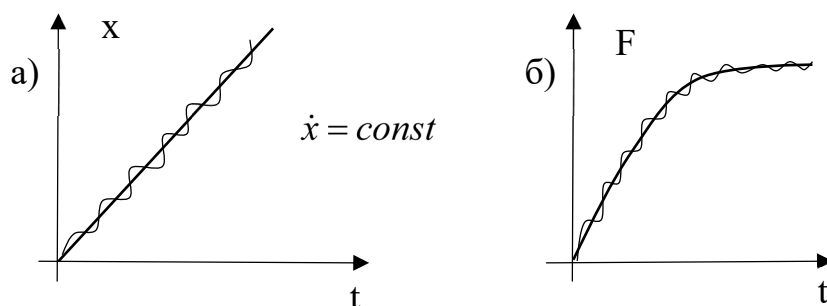


Рис. 1. а) Зависимость  $x = x(t)$ , при которой выполняется (3).

Для поддержания условия  $\dot{x} = const$ , необходимо силу  $F$  поддерживать на необходимом уровне, казанном на рис. б)

Сделаем замечания:

1. Программа нагружения, соответствующая рис. 1а, соответствует жесткому нагружению материалов [19, 20].

2. Жесткое нагружение позволяет устанавливать не только допредельное, но и запредельное деформирование, соответствующее участку  $BC$  на рис.2, случаю когда сопротивление движению падает с ростом смещения.

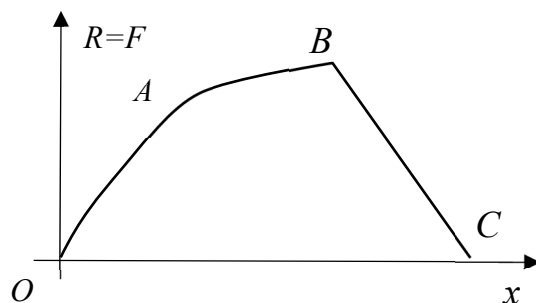


Рис. 2. Диаграмма изменения  $R = R(x)$

Обратимся к решению задачи. Пусть имеется пробойное устройство (инструмент) с массой  $m$  и начальной скоростью  $v_0$ . Пусть за время  $t_*$  инструмент погружается в среду (массив пород) на глубину  $x_*$ . Зная эти величины, требуется установить сопротивление среды прониканию инструмента на глубину  $x_*$ . Для решения задачи имеем (1) при условии  $F = 0$ :

$$m \ddot{x} = -R. \quad (4)$$

Начальные условия для (4)

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= 0, \\ \dot{x}|_{t=0} &= v_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $v_0$  - скорость движения пробойника перед встречей с преградой. Для решения (4) требуется задать сопротивление  $R = R(x, \dot{x}, t)$ . Эту функцию можно найти экспериментально при условии  $\ddot{x} = 0$ . Попробуем найти ее из других соображений. Будем в первом приближении считать, что  $R$  зависит только от  $x$  (как в упругости и пластичности). При  $R = \lambda x$  получатся только упругие отскоки от преграды. Чтобы получить внедрение, требуется в  $R$  внести константу. Такой подход можно найти в [4]. Ниже предполагаем, что функция  $R = R(x)$  носит линейный характер, то есть представляется как сумма

$$R = kx + b, \quad (6)$$

где  $k$  и  $b$  - константы. При  $x = 0$  получаем сопротивление  $R = b$ , при  $x > 0$  сопротивление внедрению растет линейно с увеличением глубины проникания, за

рост отвечает коэффициент  $k > 0$ . Возникает вопрос: как определить константы  $k$  и  $b$ , не проводя эксперимент по жестокому нагружению инструмента в массив пород? Для этого потребуются дополнительные сведения о глубина внедрения и время до остановки. Покажем это.

Подставка (6) в (4) дает

$$m\ddot{x} + kx = -b. \quad (7)$$

Решение (7) имеет вид

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) - \frac{b}{k}. \quad (8)$$

Применим начальные условия (6). Находим последовательно

$$C_1 = \frac{b}{k}, \quad C_2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (9)$$

Тогда смещение  $x$  получает вид:

$$x = \frac{b}{k} \left( \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) - 1 \right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right). \quad (10)$$

Найдем время, при котором инструмент остановится в среде, то есть скорость станет равной нулю. Для его нахождения получаем условие

$$\dot{x} = -\frac{b}{\sqrt{km}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_*\right) + v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_*\right) = 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_*\right) = \frac{v_0 \sqrt{km}}{b} \quad (12)$$

и

$$t_* = \frac{m}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 \sqrt{km}}{b}\right). \quad (13)$$

При указанном времени  $t_*$  смещение  $x_*$  на основании (10) становится равным

$$x_* = \frac{b}{k} \left[ \sqrt{1 + v_0^2 \frac{km}{b^2}} - 1 \right]. \quad (14)$$

Подставим обратную задачу – по параметрам  $t_*$  и  $x_*$ , вычисленным в процессе внедрения пробойника с заданной начальной скоростью  $v_0$  найти параметры сопротивления среды внедрению:  $b$  и  $k$ . Преобразуем выражение (14) – умножим правую часть (14) и поделим ее на сопряжённое выражение. Имеем

$$x_* = v_0^2 \frac{m}{b \left[ \sqrt{1 + v_0^2 \frac{km}{b^2}} + 1 \right]}. \quad (15)$$

Если поделить (15) на (13), то выстраивается следующее характеристическое выражение

$$\frac{x_*}{v_0 t_*} = \frac{v_0 \sqrt{km}}{b} \frac{1}{\left[ \sqrt{1 + v_0^2 \frac{km}{b^2}} + 1 \right] \operatorname{arctg} \left( \frac{v_0 \sqrt{km}}{b} \right)}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что при известных значениях  $t_*$ ,  $x_*$ ,  $v_0$  правая часть зависит только от одного параметра

$$\alpha = \frac{v_0 \sqrt{km}}{b}. \quad (17)$$

То есть

$$\frac{x_*}{v_0 t_*} = \frac{\alpha}{\operatorname{arctg} \alpha \cdot \left[ \sqrt{1 + \alpha^2} + 1 \right]}. \quad (18)$$

На рис. 3 представлена график зависимости  $\frac{x_*}{v_0 t_*}$  от  $\alpha$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  из (18) следует  $\frac{x_*}{v_0 t_*} = \frac{1}{2}$ , а при  $\alpha \rightarrow \infty$   $\frac{x_*}{v_0 t_*} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$ .

Отсюда получаем вывод: для того, чтобы среда имела сопротивление вида (6) необходимо, чтобы указанная характеристика внедрения удовлетворяла усло-

вию  $\frac{x_*}{v_0 t_*} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\pi}\right)$ . Пусть это условие выполнено. Как найти  $k$  и  $b$ ? В начале найдем  $\alpha$  из (18), переписанного в виде

$$\alpha - \frac{x_*}{v_0 t_*} \operatorname{arctg} \alpha \cdot \left[ \sqrt{1 + \alpha^2} + 1 \right] = 0. \quad (19)$$

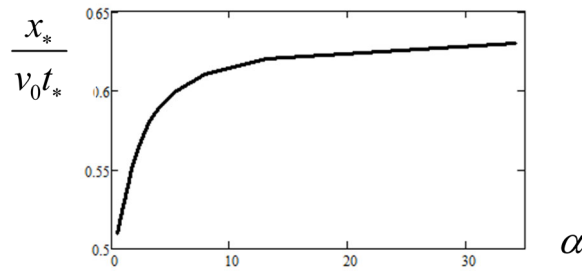


Рис. 3. Зависимость  $\frac{x_*}{v_0 t_*}$  от параметра  $\alpha$

Решая (19), найдем из (17)

$$\frac{km}{b^2} = \frac{\alpha^2}{v_0^2}, \quad (20)$$

Согласно (15) получаем

$$x_* = v_0^2 \frac{m}{b \cdot \left[ \sqrt{1 + \alpha^2} + 1 \right]}. \quad (21)$$

Отсюда теперь находим

$$b = v_0^2 m / \left( x_* \cdot \left[ \sqrt{1 + \alpha^2} + 1 \right] \right), \quad (22)$$

(20) удобно переписать как

$$k = \alpha^2 b^2 / m v_0^2. \quad (23)$$

Таким образом  $k$  и  $b$  согласно (22), (23) находятся, то есть устанавливается сопротивление среды в линейной зависимости от глубины проникания от измеренных экспериментально глубины и времени до остановки инструмента.

Замечания. 1) Из (23) видно, что величины  $b$  и  $k$  зависят от безразмерной величины  $\alpha$  и размерной величины  $\beta = \frac{mv_0^2}{x_*}$ :

$$b = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 1}}, \quad k = \frac{\alpha^2 b^2}{\beta x_*}.$$

2) Есть ограничение на входные данные параметра проникания  $\left(\frac{1}{2} < \frac{x_*}{v_0 t_*} < \frac{2}{\pi}\right)$ , чтобы использовать линейную зависимость сопротивления среды.

Приведем расчет сопротивления среды по данным работы [15].

### Результаты

Для проведения математического моделирования проникания пробойника в грунтовую среду начальные параметры использовались подобные [15], где рассматривалась кинограмма проникания стального ударника в сухой песок. Масса пробойника  $m = 0,08$  кг., скорость удара  $v_0 = 216$  м/с. Так же в этом эксперименте [15] была найдена глубина проникания  $x_* = 0,08$  м., и время проникания  $t_* = 0,5$  мс.

На рис. 4а приведена зависимость времени до остановки пробойника от массы, на рис. 4б представлена зависимость глубины проникания от массы. На рис. 5а зависимость времени до остановки пробойника от начальной скорости, на рис. 5б представлена зависимость глубины проникания от начальной скорости.

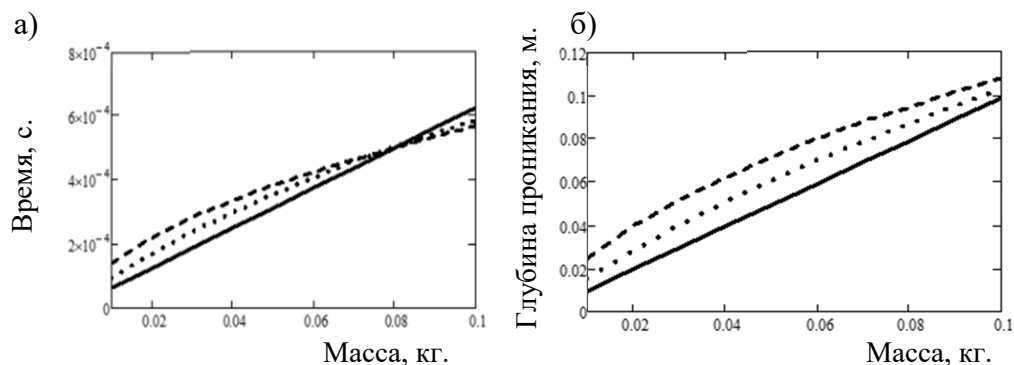


Рис. 5. Зависимость времени и глубины проникания от массы пробойника



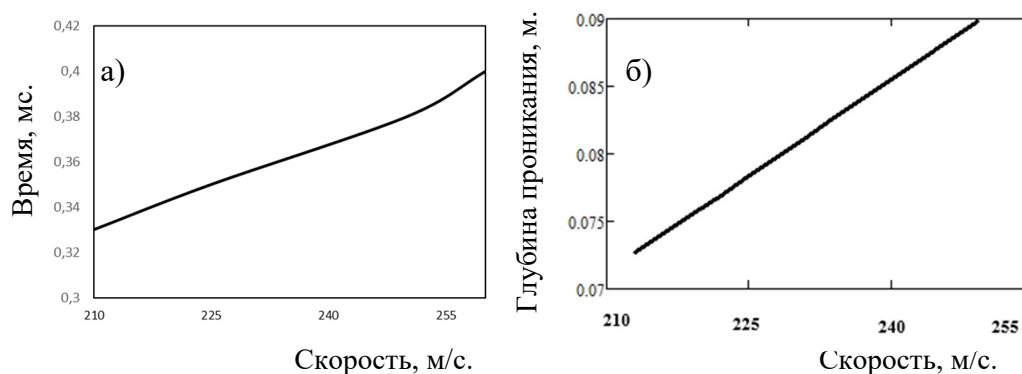


Рис. 5. Зависимость времени и глубины проникания от начальной скорости

Сравнивая полученные зависимости математического моделирования с экспериментами [15] можно увидеть хорошее соответствие.

### *Заключение*

Построена математическая модель определения сопротивления среды внедрению в нее жесткого инструмента с заданной массой и начальной скоростью.

### *Благодарности*

Работа выполняется в рамках проекта РФФ 22-17-00188

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сагомоян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 300 с.
2. Сагомоян А.Я. Удар и проникание тел в жидкость. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 172 с.
3. Григорян С.С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Механика жидкости и газа. – 1993. – № 4. – С. 18-24.
4. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Изд-во: литературы по строительству, 1965. – 448с.
5. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П. Исследования движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 2. – С. 159-165.
6. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // ПММ. 2003. № 6. С. 686–697.
7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В. и др. Пакет программ “Динамика-2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 67–72.
9. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // ЖВМиМФ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 940-953.
10. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 157–191
11. Лагунов В.А., Степанов В.А. Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях // ПМТФ. 1963. № 1. С. 88–96.

12. Дианов М.Д., Златин Н.А., Мочалов С.М. и др. Ударная сжимаемость сухого и водонасыщенного песка // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2. Вып. 12. С. 529–532.
13. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 6. С. 115–125
14. Брагов А.М., Баландин В.В., Баландин Вл.Вл., Котов Л.Л., Пархачев В.В. Экспериментальный комплекс для исследования параметров удара и проникания твердых тел в мягкие грунтовые среды // Материалы XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. 2019. С. 452-454.
15. Баландин Вл.Вл. Установка для исследования процессов высокоскоростного соударения // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. С. 232-237.
16. Bless S, Peden B, Guzman I, Omidvar M, Iskander M. Poncelet coefficients of granular media / In: Song B, Casem D, Kimberley J, editors. Dynamic behavior of materials, volume 1, Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Lombard, IL: Springer; 2014. pp. 373-80.
17. Моссаковский П.А., Баландин В.В., Беляев А.П., Белякова Т.А., Брагов А.М., Инюхин А.В., Костырева Л.А. Исследование диссипативных факторов при пробивании многослойных тканевых преград // Проблемы прочности и пластичности, 2015, №4, т. 77. С.-385-391.
18. Аллен У., Мэйфилд Э., Моррисон Г. Динамика проникания снаряда в песок // Механика. Сб. переводов. – М.: ИЛ, 1957. – № 6. – С. 125-137.
19. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г., Пластичность горных пород, Недра, М., 1979. – 305 с.
20. Mogi K. Experimental rock mechanics CRC Press. +- London. – 2007. 375 pp.

© А. И. Чанышев, О. Е. Белоусова, 2022