

## Отображение шероховатости границ модели в статистическое распределение упругих параметров слоистой среды

*Т. С. Хачкова<sup>1\*</sup>, В. В. Лисица<sup>1</sup>, Д. Р. Колюхин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,  
г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация  
\* e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru

**Аннотация.** В работе изучается влияние шероховатости интерфейса на упругие параметры слоистой среды. Рассматриваются трехмерные модели слоистой среды с разным материалом внутри и снаружи слоя. Сначала статистически создается первый класс моделей с шероховатыми границами раздела между слоями и фиксированными параметрами упругости внутренних слоев. Затем оценивается эффективный тензор жесткости для эквивалентной однородной модели. После чего восстанавливаются новые параметры упругости внутреннего слоя для моделей второго класса с плоскими границами. Таким образом, шероховатость границ модели отображается в статистическое распределение компонент тензора жесткости при фиксированной геометрии модели. Кроме этого, предлагается алгоритм расширения результатов восстановления тензоров упругости для произвольных параметров шероховатости интерфейса с применением билинейной регрессии ковариационных матриц. Верификация алгоритма показывает, что ошибка при восстановлении ковариационной матрицы не превышает 7%; т.е., его можно использовать при статистическом моделировании второго класса моделей с плоскими границами для произвольных значений шероховатости границы и заданных физических параметров слоев в первом классе моделей.

**Ключевые слова:** цифровой керн, упругие параметры, шероховатость границ раздела, геостатистическое моделирование

## Converting the Roughness of Model Interfaces into the Statistical Distribution of Elastic Parameters of the Layered Medium

*T. S. Khachkova<sup>1\*</sup>, V. V. Lisitsa<sup>2</sup>, D. R. Kolyukhin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk,  
Russian Federation

<sup>2</sup> Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation  
\* e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru

**Abstract.** In the paper, the effect of interface roughness on the elastic parameters of a layered medium is studied. Three-dimensional models of a layered medium with different material inside and outside the layer are considered. Initially, the first class of models is statistically generated with rough interfaces between the layers and fixed elastic parameters of the inner layers. Then the effective stiffness tensor is estimated for the equivalent homogeneous model. After that, new elasticity parameters of the inner layer are reconstructed for second class of models with flat interfaces. Thus, the roughness of the model interfaces is mapped into a statistical distribution of the stiffness tensor components for a fixed model geometry. In addition, an algorithm for extending the results of reconstructing the elastic tensors for arbitrary interface roughness parameters using bilinear regression of covariance matrices is proposed. The algorithm verification shows that the error in

restoring the covariance matrix does not exceed 7%; i.e., one can use it in statistical modeling the second class of models with flat interfaces for the arbitrary interface roughness values and given physical parameters of layers in the first class of models.

**Keywords:** elastic properties, interfaces roughness, digital rock physics, geostatistical modeling

### *Введение*

В сейморазведке широко распространены аналитические методы усреднения для слоистой среды [1, 2, 3]. Это связано, в первую очередь, со строением земной коры, которое при отсутствии тектонических нарушений часто характеризуется слабой изменчивостью параметров в горизонтальном направлении, особенно в сравнении с вертикальным. Для таких условий используется модель вертикальной трансверсально-изотропной среды с более или менее упорядоченным чередованием изотропных слоев. Надо отметить, что границы раздела в таких моделях предполагаются плоскими [1, 2], что, однако, не всегда соответствует действительности. Если границы раздела неоднородны, т.е. присутствуют шероховатости, это неизбежно приводит к ошибкам при восстановлении параметров усредненных (эффективных) моделей, которые в дальнейшем негативно сказываются на качестве обработки и интерпретации сейсмических данных.

Численное исследование, выполненное в работе, направлено на оценку влияния шероховатости границ раздела как на эффективные упругие параметры моделей, так и на восстановленные упругие параметры внутреннего слоя эквивалентных моделей с плоскими границами. Эквивалентность означает, что усредненные параметры исходной модели с шероховатыми границами и фиксированными упругими параметрами внутреннего слоя (модели первого класса) и восстановленной модели с плоскими границами и статистическими отклонениями в значениях упругих параметров (второго класса) совпадают. Задачами работы являются создание алгоритма отображения шероховатости границ в статистическое распределение компонент тензора жесткости внутреннего слоя модели второго класса и расширение результатов такого восстановления на всю область четырехмерного параметрического пространства. К заданным статистическим параметрам шероховатости относятся стандартное отклонение и длина корреляции, а к физическим параметрам – изменяющиеся упругие параметры внутреннего слоя в исходных моделях. В результате, возможность статистического моделирования компонент тензора жесткости внутреннего слоя для произвольных значений шероховатости границ раздела, которые всегда находятся за пределами разрешающей способности сейсмических методов, позволит значительно повысить достоверность интерпретации сейсмических данных.

В работе [4] представлены результаты двумерных экспериментов и соответствующие выводы. В данной работе рассматривается трехмерный случай. Поскольку расчеты для таких моделей гораздо более ресурсозатратны, серии экспериментов выполняются в меньшем объеме по сравнению с двумерным случаем, но полученные результаты подтверждают сделанные ранее выводы.

## Метод

Рассмотрим систему уравнений упругости в статической постановке, заданную в прямоугольной репрезентативной области  $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2] \times [0, X_3]$ , которая в Декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( c_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + c_{66} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + c_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( c_{66} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + c_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( c_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + c_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0, x_2, x_3) &= \sigma_{11}^1, & \sigma_{11}(X_1, x_2, x_3) &= \sigma_{11}^1, \\ \sigma_{12}(0, x_2, x_3) &= \sigma_{12}^1, & \sigma_{12}(X_1, x_2, x_3) &= \sigma_{12}^1, \\ \sigma_{13}(0, x_2, x_3) &= \sigma_{13}^1, & \sigma_{13}(X_1, x_2, x_3) &= \sigma_{13}^1, \\ \sigma_{22}(x_1, 0, x_3) &= \sigma_{22}^2, & \sigma_{22}(x_1, X_2, x_3) &= \sigma_{22}^2, \\ \sigma_{12}(x_1, 0, x_3) &= \sigma_{12}^2, & \sigma_{12}(x_1, X_2, x_3) &= \sigma_{12}^2, \\ \sigma_{23}(x_1, 0, x_3) &= \sigma_{23}^2, & \sigma_{23}(x_1, X_2, x_3) &= \sigma_{23}^2, \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) &= \sigma_{33}^3, & \sigma_{33}(x_1, x_2, X_3) &= \sigma_{33}^3, \\ \sigma_{13}(x_3, x_2, 0) &= \sigma_{13}^3, & \sigma_{13}(x_1, x_2, X_3) &= \sigma_{13}^3, \\ \sigma_{23}(x_3, x_2, 0) &= \sigma_{23}^3, & \sigma_{23}(x_1, x_2, X_3) &= \sigma_{23}^3, \end{aligned}$$

где  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  – компоненты вектора смещений,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжения, а  $c_{ij}$  – компоненты тензора жесткости. Связь между тензорами напряжений и деформаций в обозначениях Фойгта может быть записана как:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & & & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{55} & \\ & & 0 & & & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

где компоненты тензора деформаций определены как  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ .

В работе мы ограничиваемся случаем ортотропной симметрии среды.

Для тензора  $C(x_1, x_2, x_3)$ , зависящего от пространственных координат, можно найти постоянный эффективный тензор жесткости  $\tilde{C}$ , связывающий усредненные по объему напряжения и деформации:

$$\langle \sigma \rangle_V = \tilde{C} \langle \varepsilon \rangle_V,$$

где  $\langle \rangle_V$  означает усреднение по объему:

$$\langle f \rangle_V = V^{-1} \int_V f(x_1, x_2, x_3) dv.$$

Решение задачи нахождения эффективного тензора жесткости  $\tilde{C}$  подробно описано нами в статье [4].

Рассмотрим модель слоистой среды с двумя различными упругими материалами внутри и снаружи слоя. Предполагается, что внешний материал является фиксированным, это зерна кварца, а параметры внутреннего материала могут меняться. Рассматриваются два класса моделей. Первый класс — модели с шероховатыми границами раздела и постоянными модулями упругости внутреннего слоя (рис. 1а), второй — модели с плоскими границами раздела и статистически изменяющимся тензором жесткости слоя (рис. 1б). Основная идея метода заключается в отображении шероховатости границ модели в статистическое распределение компонент тензора жесткости внутреннего слоя модели второго класса.

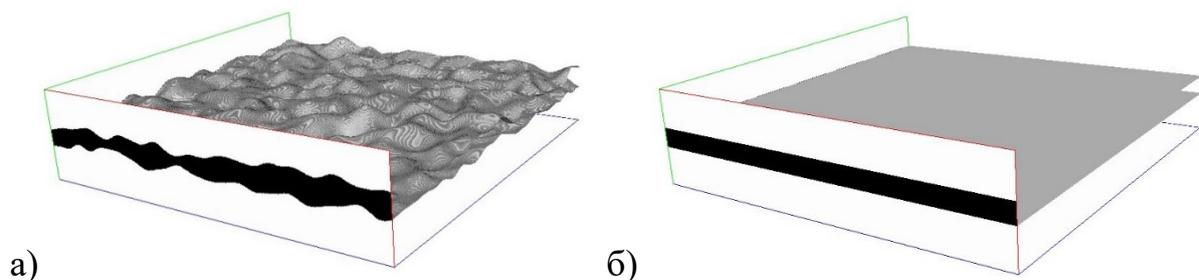


Рис. 1. Примеры 3D-моделей слоистой среды из двух классов:

а) с шероховатыми границами раздела и постоянным тензором жесткости внутреннего слоя; б) с плоскими границами и статистически изменяющимся тензором жесткости внутреннего слоя

Сначала мы моделируем первый набор. Границы  $b_d(x_1, x_2)$  и  $b_u(x_1, x_2)$  задаются как случайные функции:

$$b_d(x_1, x_2) = \langle b_d \rangle + b'_d(x_1, x_2), \quad b_u(x_1, x_2) = \langle b_u \rangle + b'_u(x_1, x_2),$$

где средние значения  $\langle b_d \rangle$  и  $\langle b_u \rangle$  - постоянны, а возмущения  $b'_d$  и  $b'_u$  - случайные функции с гауссовским распределением, нулевым средним значением и функцией ковариации  $Q(r_1, r_2)$ , где  $r_1, r_2$  - расстояния вдоль границы раздела. Мы рассматриваем гауссовское распределение, определяемое стандартным отклонением  $\varphi$  и длиной корреляции  $I$ :

$$Q(r_1, r_2) = \varphi^2 \exp\left(-\frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{4I^2}\right).$$

Моделирование выполняется методом, описанным в [5].

Далее для каждой модели из первого набора оценивается эффективный тензор жесткости для эквивалентной однородной модели [4]. После чего, применяя обратные формулы [2], восстанавливаются новые модули упругости внутреннего слоя для моделей второго класса с плоскими границами раздела [4]. Основным вопросом, который здесь возникает: как ковариационная матрица элементов восстановленного тензора жесткости связана со стандартным отклонением и длиной корреляции интерфейсов в исходном наборе?

### *Эксперименты*

При создании первого набора моделей использовались следующие параметры: при толщине внутреннего слоя  $L$  размер модели вдоль слоя задавался как  $20L$ , а поперек слоя –  $5L$ . Шаг дискретизации выбирался одинаковым в обоих пространственных направлениях, поэтому расчетная область составила 1000 точек вдоль и 250 точек поперек слоя. Параметры зерен кварца ( $c_{11} = 95,4$  ГПа,  $c_{55} = 44$  ГПа) используются для материала снаружи слоя, а различные параметры глины  $c_{55} \in [6, 16.8, 33]$  ГПа,  $c_{11} / c_{55} \in [2.16, 3.06, 4]$  ГПа – для внутреннего слоя. В статистических моделях шероховатости рассматриваются значения длины корреляции  $I \in [0.1L, 0.2L, 0.4L, 0.8L, 1.6L]$  и стандартного отклонения  $\varphi \in [0.02L, 0.04L, 0.1L, 0.2L]$ . Для каждой статистической модели  $[I_i, \varphi_j, (c_{55})_n, (c_{11} / c_{55})_m]$  создается по 10 реализаций. В итоге, исследуются наборы восстановленных тензоров жесткости для слоев с плоскими границами раздела в моделях второго класса.

Сначала рассматриваются покомпонентные средние значения, вычисленные для каждой статистической модели по набору реализаций, и их доверительные интервалы. Предполагалось, что эти средние значения совпадут с исходными тензорами для внутреннего слоя первого класса моделей. Сравнение относительной погрешности в евклидовой норме между полученным средним значением и тензором, соответствующим исходной модели, с относительной нормой доверительных интервалов, рассчитанных с помощью t-распределения, подтверждает ожидаемое совпадение (рис. 2). Здесь доверительный интервал рассчитывается следующим образом:

$$q_{kl} = t_{\alpha, N-1} \frac{S}{\sqrt{N}}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (c_{kl})_i^2 - N \overline{c_{kl}}^2}{N-1},$$

где  $\overline{c_{kl}}$  – среднее по набору реализаций,  $S$  – дисперсия,  $N$  – число реализаций,  $t_{\alpha, N-1}$  – квантиль распределения Стьюдента уровня  $1 - \alpha / 2$  с  $N - 1$  степенью свободы, уровень значимости выбран равным 0.05.

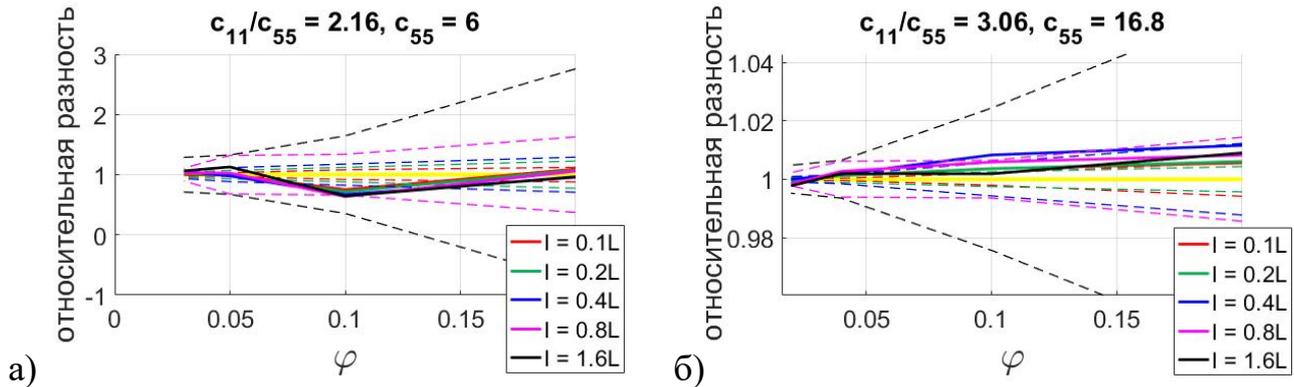


Рис. 2. Относительные разности (сплошными линиями) между исходным тензором жесткости и средним значением восстановленных тензоров, относительные нормы доверительных интервалов (пунктиром) в зависимости от стандартного отклонения  $\varphi$  и длины корреляции  $l$

Затем мы использовали тест Ройстона [6], который подтвердил многомерное нормальное распределение компонент восстановленных тензоров жесткости. Следовательно, это распределение полностью определяется вектором средних значений и матрицей ковариации.

Таким образом, мы получили значения восстановленных модулей упругости в точках регулярной сетки в четырехмерном параметрическом пространстве  $[l, \varphi, c_{55}, c_{11} / c_{55}]$ . Далее предлагается метод распространения результатов на всю непрерывную область, который позволяет строить тензоры модулей упругости внутреннего слоя для произвольных значений указанных параметров с помощью ковариационных матриц.

### Статистическое моделирование

Ковариационные матрицы симметричны и строго положительно определены. Поскольку их размер в данном случае равен  $9 \times 9$  (строятся по компонентам  $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}, c_{12}, c_{13}, c_{23}$ ), то мы можем применить любой явный метод линейной алгебры. Рассмотрим следующую интерполяцию:

$$\Sigma(t) = \exp[(1-t) \ln(\Sigma_1) + t \ln(\Sigma_2)],$$

где  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – ковариационные матрицы в точке сетки, а  $\exp$  и  $\ln$  – матричные функции.

Сначала мы фиксируем три из четырех параметров и исследуем компоненты матрицы  $\Psi = \ln(\Sigma)$  как функцию четвертого параметра (рис. 3). Видно, что коэффициенты матриц почти линейно зависят от  $\ln(\varphi)$  и  $\ln(I)$ , в то время как зависимость от физических параметров внутреннего слоя более сложная.

В итоге, для интерполяции по параметрам шероховатости границы (стандартному отклонению  $\varphi$  и длине корреляции  $I$ ) используется билинейная регрессия ковариационных матриц, а для интерполяции по физическим параметрам ( $c_{55}$ ,  $c_{11}/c_{55}$ ) применяется стандартная линейная интерполяция по двум ближайшим точкам [4].

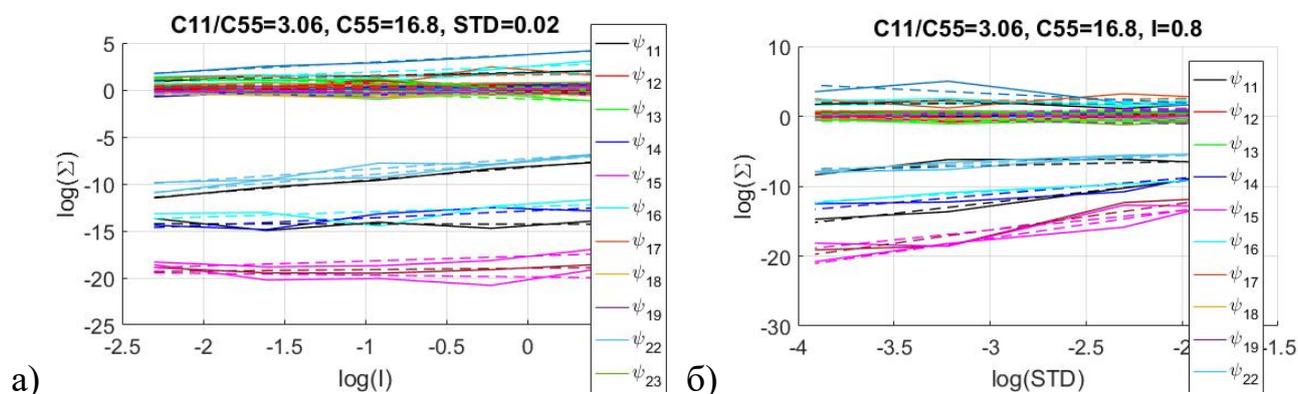


Рис. 3. Зависимость компонент матриц  $\ln(\Sigma)$  от длины корреляции  $\ln(I)$  (а) и стандартного отклонения  $\ln(\varphi)$  (б). Сплошные линии — компоненты матрицы; пунктирные линии — линейная регрессия соответствующих компонент

Для верификации алгоритма восстановления ковариационной матрицы мы создали 18 наборов для случайных значений четырех параметров из параметрического пространства, по 10 реализаций в каждом. На рис. 4 представлены относительные погрешности ковариационных матриц, восстановленных с помощью интерполяции, и полученных в ходе экспериментов со случайным набором. Видно, что относительная погрешность увеличивается с ростом стандартного отклонения шероховатой границы и независима от длины корреляции. Кроме того, для стандартного отклонения  $\varphi \in [0, 0,2L, 0, 0,4L, 0, 1L, 0, 2L]$  только интервал  $\varphi \in [0, 1L, 0, 2L]$  приводит к большим ошибкам, а для значений стандартного отклонения от  $0,02L$  до  $0,1L$  ошибки восстановления ковариационной матрицы не превышают  $0,07\%$ . Таким образом, при заданном ограничении на значения стандартного отклонения алгоритм восстановления можно использовать для статистического моделирования среды с плоской границей раздела и случайным материалом во внутреннем слое.

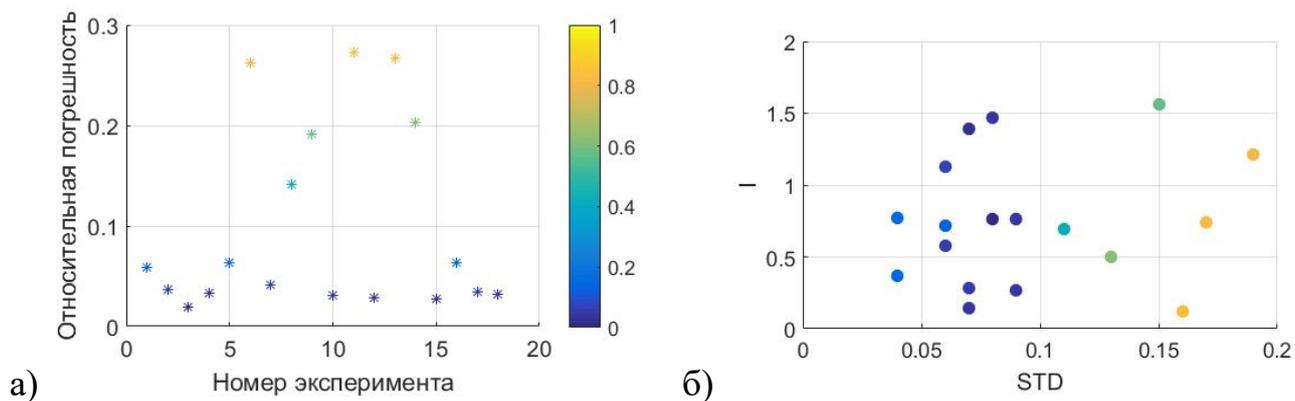


Рис. 4. Относительные погрешности восстановленных матриц  $\Psi$  для случайных четверок. Цвет маркера соответствует значению ошибки

### Заключение

В работе изучается влияние шероховатости интерфейса на упругие параметры слоистой среды. Сначала статистически создается первый класс моделей с шероховатыми границами раздела между слоями и фиксированными параметрами упругости внутренних слоев. Затем оценивается эффективный тензор жесткости для эквивалентной однородной модели. После чего восстанавливаются новые параметры упругости внутреннего слоя для моделей второго класса с плоскими границами. Т.е. шероховатость границ модели отображается в статистическое распределение компонент тензора жесткости при фиксированной геометрии модели. Также предлагается алгоритм расширения результатов восстановления тензоров упругости для произвольных параметров шероховатости интерфейса с применением билинейной регрессии ковариационных матриц. Верификация алгоритма показывает, что ошибка при восстановлении ковариационной матрицы не превышает 7%; т.е., его можно использовать при статистическом моделировании второго класса моделей с плоскими границами для произвольных значений шероховатости границы и физических параметров слоев в первом классе моделей.

### Благодарности

В. Лисица выполнил численное моделирование, Т. Хачкова – статистический анализ результатов при поддержке гранта РФФ № 22-11-00004. Д. Колюхин сгенерировал модели с шероховатыми границами при поддержке гранта РФФ № 19-77-20004.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Backus G.E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // Journal of Geophysical Research. – 1962. – Vol. 67. – I. 11. – P. 4427–4440.
2. Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media // Geophysics. – 1989. – Vol. 54. – I. 5. – P. 581–589.
3. Henriques J.P., de Figueiredo J.J.S., Santos L.K., Macedo D.L., Coutinho I., da Silva C.B., Melo A.L., Sousa M., Azevedo F.L. Experimental verification of effective anisotropic crack theories

in variable crack aspect ratio medium // Geophysical Prospecting. – 2018. – Vol. 66. – I. 1. – P. 141–156.

4. Khachkova T., Lisitsa V., Kolyukhin D., Reshetova G. Influence of interfaces roughness on elastic properties of layered media // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2021. – Vol. 66. – P. 103170.

5. Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems. – Springer, 1991.

6. Royston J.P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the shapiro-wilk w. // Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics). – 1983. – Vol. 32. – I. 2. – P. 121–133.

© Т. С. Хачкова, В. В. Лисица, Д. Р. Колюхин, 2022