УДК 550.34
DOI: 10.33764/2618-981X-2021-4-1-226-231

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Михаил Вадимович Урев
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, тел. (383)330-83-52, e-mail: urev@nmsf.sscc.ru

Холматжон Худайназарович Имомназаров
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, тел. (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Илхам Кучкарович Искандаров
Тихоокеанский государственный университет, 680035, Россия, г. Хабаровск, Тихоокеанская ул., 136, старший преподаватель, тел. (4212)37-51-88, e-mail: iskandarovilkham@mail.ru

В статье рассмотрена краевая задача для переопределенной системы уравнений в полуплоскости. Такая задача возникает, в частности, при рассмотрении стационарной системы двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и краевыми условиями Дирихле для двух скоростей фаз, а также в задачах электродинамики. Обобщенное решение для стационарной системы двухскоростной гидродинамики в случае двухмерных неограниченных областей, в частности в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. При этом считается среда однородной и диссипация энергии происходит за счет сдвиговых вязкостей фаз подсистем и другие эффекты в данной работе не рассматриваются. Массоперенос происходит за счет массовой силы. При надлежащем выборе функциональных пространств доказано существование и единственность обобщенного решения с соответствующей оценкой устойчивости.

Ключевые слова: двухжидкостная среда в полуплоскости, несжимаемая жидкость, уравнение Пуассона, переопределенная система, обобщенное решение

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE OVERDETERMINED SYSTEM IN A HALF-PLANE

Mikhail V. Urev
Institute of the Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Prospect Akademik Lavrentiev St., Novosibirsk, 630090, Russia, D. Sc., Leading Researcher, phone: (383)330-83-52, e-mail: urev@nmsf.sscc.ru

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov
Institute of the Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Prospect Akademik Lavrentiev St., Novosibirsk, 630090, Russia, D. Sc., Chief Researcher, phone: (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Ilham K. Iskandarov
Pacific State University, 680035, 136, Tihookeanskaya St., Khabarovsk, 680035, Russia, Senior Lecturer, phone: (4212)37-51-88, e-mail: iskandarovilkham@mail.ru

This paper considers a boundary value problem for an overdetermined system of equations in a half-plane. This problem arises in particular when solving a stationary system of the two-velocity hydrodynamics with one pressure and homogeneous divergent conditions and the Dirichlet boundary conditions for two phase velocities, as well as in problems of electrodynamics. The generalized solution to a stationary system of the two-velocity hydrodynamics in the case of two-dimensional unbounded domains, for instance, in a half-plane, has a significant difference from the three-dimensional case. Namely, in the two-dimensional case for the velocities it is impossible to satisfy the pre-set conditions at infinity and the condition of boundedness at infinity is imposed. In this case, the medium is considered to be homogeneous, and the energy dissipation occurs due to the shear viscosities of the phases of the subsystems, and other effects are not discussed in this paper. The mass transfer occurs due to the mass force. With an appropriate choice of functional spaces, the existence and uniqueness of a generalized solution with an appropriate stability estimate has been proved.

Keywords: two-fluid medium, incompressible fluid, Poisson's equation, overdetermined system, generalized solution, stability estimate

Введение

Многофазные потоки широко распространена и часто бывает определяющей в технологических и природных процессах. Зачастую это явление протекает в нестационарных условиях, в частности, при изменении по величине и направлению силовых полей. Более того, модуляция таких полей может генерировать конвективные потоки вибрационной или параметрической резонансной природы. Это делает важным изучение условий возникновения и пространственно-временной эволюции гравитационно-конвективных, вибро-конвективных и резонансных течений. Устойчивый интерес к задачам этого круга вызван развитием космических технологий, поскольку быстроменяющиеся инерционные и остаточные гравитационные ускорения в условиях орбитального полета могут определять динамику тепло- и массообмена в стратифицированных по плотности средах. В настоящее время исследования в этом направлении проводятся очень интенсивно и составляют содержание целого ряда научных журналов и серий международных конференций.

Отметим также, что изменение силовых полей может оказывать управляющее влияние на эволюцию конвективных систем, и это направление исследований является перспективным как с точки зрения определения общетеоретических закономерностей, так и многочисленных технологических приложений. Представляемая работа, в которую вошли результаты экспериментальных исследований, проведенных в 1989–2011 гг., содержит постановку и экспериментальное решение широкого класса задач по исследованию конвективных процессов в переменных по величине и направлению силовых полях и управлению ими.

С многофазными потоками как правило приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Следовательно, возникающие начально краевые задачи для таких сред является актуальной и важной проблем гидромеханики вообще и механики многофазных сплошных сред в частности [1-3].

Гетерогенные многофазные среды описывают многообразие, взаимовлияние явлений и сложность эффектов, возникающих благодаря неоднофазности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические превращения, капиллярные эффекты, сегрегации, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

Основной проблемой при математическом моделирования многоскоростного континуума является построение термодинамически согласованных замкнутых динамических уравнений смеси для заданных физико-химических свойств каждой фазы и заданной исходной структуры смеси. При стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и в диссипативном приближении когда потеря энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений оказывается переопределенной [4-13].

Обобщенное решение системы Навье-Стокса в двухмерных неограниченных областях, в частности, в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности.

В [5] показано, что обобщенное решение $\boldsymbol{u}$ задачи Стокса, принадлежащее $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$, $\mathbb{R}_+^2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2>0\}$, имеет вполне определенный предел $\lim\limits_{x_2\to+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}^\infty=\text{const}$, если массовая сила $\boldsymbol{f}$ имеет компактный носитель или достаточно быстро убывает при $x_2\to+\infty$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{u}^\infty$ определяется $\boldsymbol{f}$ и не может задаваться произвольно.

Краевая задача для двухскоростной системы Стокса с одним давлением в полупространстве

При найденном давлении $p\in L_2(\mathbb{R}_+^2)$ из задачи Стокса для одной из двух жидких сред для скорости $\boldsymbol{w}$ другой жидкой среды получим следующую задачу

$$\boldsymbol{\Delta w}=\boldsymbol{F},\qquad div\,\boldsymbol{w}=0\qquad \text{в}\quad \mathbb{R}_+^2,\qquad \boldsymbol{w}|_S=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

где $S=\{(x_1,0):x_1\in\mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{F}=\frac{1}{\nu}(\nabla p-\rho\boldsymbol{f})$, ν - соответствующая сдвиговая вязкость, ρ - общая плотность двухжидкостной среды.

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу $\boldsymbol{f}$ и поле скорости $\boldsymbol{w}$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона [6, 7].

Обозначим через $\dot{\boldsymbol{J}}(\mathbb{R}_+^2)$ подмножество в $\boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ соленоидальных векторов. Для вектор-функций из $\boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ имеет место неравенство

$$\left\|\boldsymbol{w}\right\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}_+^2)}\le 2\left\|\boldsymbol{w_x}\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2)}\qquad \forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^2),\tag{2}$$

где $L_{2,\omega}(\mathbb{R}_+^2)=\{u:\omega\,u\in L_2(\mathbb{R}_+^2)\}$, $\omega(x_2)=\frac{1}{(3+x_2)\,ln(3+x_2)}$.

Неравенство (2) позволяет ввести в $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^2)$ следующие скалярное произведение и норму

$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = \int_{\mathbb{R}_+^2} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_{\dot{\boldsymbol{J}}(\mathbb{R}_+^2)} = \sqrt{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}]}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$ пополнение $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^2)$, а через $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$ пополнение $\dot{\boldsymbol{J}}(\mathbb{R}_+^2)$ по введенной норме. $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$ является замкнутым подпространством в пространстве вектор-функций $\boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$. После замыкания по норме пространства $\boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$, неравенство (2) становится верным для $\forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$. Пусть $\widehat{\boldsymbol{V}}(\mathbb{R}_+^2)$ замкнутое подпространство в $\boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$, определяемое как

$$\widehat{\boldsymbol{V}}(\mathbb{R}_+^2) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2) : div\, \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Хейвудом доказано [14, теорема 9], что $\widehat{\boldsymbol{V}}(\mathbb{R}_+^2) = \boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$.

Теперь перейдем к рассмотрению системы уравнений (1) относительно скорости $\boldsymbol{w}$ второй фазы жидкости с уже известным давлением $p \in M = L_2(\mathbb{R}_+^2)$.

Для $p \in M$ градиент ∇p есть линейный непрерывный функционал над пространством $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}_0^1(\mathbb{R}_+^2)$, действующий по правилу

$$< \nabla p, \boldsymbol{w} >= -\int_{\mathbb{R}_+^2} p\,(\boldsymbol{x})\, div\, \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{X},$$

то есть $\nabla p \in \boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{V}^{-1}(\mathbb{R}_+^2)$.

Лемма. Справедливо неравенство

$$\|p\|_M \le K \|\nabla p\|_{\boldsymbol{X}^*}, \qquad \forall p \in M,$$

где $K > 0$ --постоянная.

Предполагая, что в задаче (1) $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}^*$ и зная, что $\nabla p \in \boldsymbol{X}^*$, мы получим, что правая часть в (1) $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{X}^* \subseteq \boldsymbol{V}^*(\mathbb{R}_+^2)$. Обобщенное решение переопределенной задачи (1) следуя [3], [4] будем искать в подпространстве $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$ соленоидальных векторных функций. Требуется найти $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$:

$$[\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}] =< \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} >, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2). \tag{3}$$

Имеем

$$[\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}] = \|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2),$$

то есть билинейная форма в левой части (3) $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$ - коэрцитивна. Функционал $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{F}$ в правой части (3) есть линейный непрерывный функционал над элементами пространства $\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда по лемме Лакса-Мильграма задача (3) имеет единственное решение $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)$ и

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{V}(\mathbb{R}_+^2)} \le C \|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{V}^*(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Заключение

Доказано существование, единственность обобщенного решения и оценка устойчивости краевой задачи для переопределенной системы уравнений в полуплоскости. Такого вида задачи возникают в частности при рассмотрении стационарной системы двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и краевыми условиями Дирихле для двух скоростей фаз, а также в задачах электродинамики. При этом обобщенное решение для стационарной системы двухскоростной гидродинамики в случае двухмерных неограниченных областей, в частности, в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. При этом считается среда однородной, и диссипация энергии происходит за счет сдвиговых вязкостей фаз подсистем и другие эффекты в данной работе не рассматриваются. Массоперенос происходит за счет массовой силы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-15002).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика. – 1987. – № 6. – С. 108–117.

2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. – 1989. – № 9. – С. 56–64.

3. Джураев Д., Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тезисы республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа", 26-27 ноября 2015 г., Бухара. – С. 197–198.

4. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем. – 2014. т. 17. – № 4. – С. 60–66.

5. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. – Ташкент, 2012. – 212 с.

6. Жураев Д.А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде // УзбМЖ. – 2016. – № 3. – С. 58–69.

7. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2017. Т. 20. – № 4. – С. 425–437.

8. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростова-на-Дону, 2014. – С. 166– 169.

9. Imomnazarov Sh. (2018) On a Problem Arising in a Two-Fluid Medium / Imomnazarov Sh., Imomnazarov Kh., Kholmurodov A., Dilmuradov N., Mamatkulov M. // International Journal of Mathematical Analysis and Applications. No. 5(4). – P. 95–100.

10. Imomnazarov Kh.Kh. (2019) The solution of one overdetermined stationary system arising in an incompressible two-fluid medium in a half-space / Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh.,

Urev M.V., Bakhramov R.Kh. // Bull. Nov. Comp. Center, Math.Model. in Geoph. No. 21. – P. 35–42.

11. Арипов М., Имомназаров Х., Караваев Д., Коробов П. Обобщенное решение одной переопределенной стационарной системы двухжидкостной среды // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2019. – № 2(20). – С. 20–25.

12. Baishemirov Z. (2020) Solving the problem of two viscous incompressible fluid media in the case of constant phase saturations / Baishemirov Z., Tang J.-G., Imomnazarov K., Mamatqulov M. // Open Engineering Vol. 6, No. 1. – P. 742–745.

13. Бердышев А.С., Имомназаров Х.Х. Прямые и обратные задачи для системы уравнений теории двухскоростного континуума. – Алматы, 2017. – 153 с.

14. Heywood J.G. (1976) On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math. Vol. 136. – P. 61–102.