

## **О СОПРОТИВЛЕНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ПРЕГРАДЫ ПРИ ПРОНИКАНИИ В НЕЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

### ***Анвар Исмагилович Чанышев***

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный проспект, 54, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, тел. (383)205-30-30 доб. 716; Новосибирский Государственный Университет Экономики и Управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, Каменская, 52, профессор кафедры математики и естественных наук, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

### ***Ольга Евгеньевна Белоусова***

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный просп., 54, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, тел. (383)205-30-30, доб. 716, e-mail: o.e.belousova@mail.ru

### ***Ольга Анваровна Лукьяшко***

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный просп., 54, инженер, тел. (383)205-30-30 доб. 716, e-mail: lykola@yandex.ru

Исследуется задача о пробитии преград твердым телом. Вводится функция сопротивления материала, изменяющаяся в виде одной арки синусоиды. Решается уравнение движения твердого тела. Определяется скорость, при которой пробойник достигнет тыльной стороны преграды. Рассматриваются другие варианты начальной скорости, при которой тело застревает в преграде или при которой вылетает за ее пределы. Обсуждается вопрос об определении силы, характеризующей сопротивление материала, по скорости вылета пробойника из преграды.

**Ключевые слова:** сопротивление материала, пробитие преграды, начальная скорость, характер движения пробойника в преграде

## **RESISTANCE OF THICK-WALLED BARRIER IN PENETRATION OF A SOLID BODY**

### ***Anvar I. Chanyshev***

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Dr. Sci. (Phys.-Math.), office: +7 (383) 205 30 30 (716); Novosibirsk State University of Economics and Management, 52 Kamenskaya street, Novosibirsk, 630099, Russia, Professor at the Mathematics and Natural Sciences Department, office: (383)243-94-75, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

### ***Olga E. Belousova***

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, office: +7 (383)205-30-30 (716), e-mail: o.e.belousova@mail.ru

**Olga A. Luk'yashko**

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54, Krasny prospect, Novosibirsk, 630091, Russia, Engineer, office: +7 (383) 205 30 30 (716), e-mail: lykola@yandex.ru

The authors discuss bursting of barriers by solid bodies. The resistance function changes along a single-arc sinusoid. The equation of motion of a solid body is solved. The velocity of the drift hammer to reach the back of the barrier is determined. The alternative initial velocities such that the solid body is jammed in the barrier or is shot outside the barrier are examined. Determination of the barrier resistance force versus the shoot-out velocity of the drift hammer is discussed.

**Keywords:** resistance, barrier bursting, initial velocity, drift hammer penetration in barrier

### ***Введение***

Отметим, что задачи проникания твердых тел в преграды интересовали многочисленных исследователей [1-19]. Есть работы, в которых преграда рассматривалась как абсолютно - упругое тело [6-8], в других работах преграда воспринималась как жестко - пластическая среда [9-11] в работах [12-14] задачи о проникании твердых тел решались в упругопластической постановке. В то же время при разрушении конструкций должна также учитываться ниспадающая ветвь кривой «напряжение – деформация», которая соответствует падению сопротивления материала деформирования с ростом деформаций. В этом направлении работ не так уж много и связано это прежде всего с тем, что для построения уравнений процесса запредельного деформирования необходимы данные, полученные на испытательных машинах жесткого типа, когда в процессе нагружения контролируются смещения захватов машины. Поскольку таких испытательных машин не так много, поэтому данных также недостаточно.

### ***Математическая модель***

Обратимся теперь к решению поставленной задачи. Пусть имеется абсолютно твердое тело массой  $m$ . Рассмотрим уравнение движения этого тела в виде в котором координаты тензоров  $T_\sigma, T_\varepsilon$  равны

$$m\ddot{x} = F - R \quad (1)$$

где  $F$  - это активная сила, приложенная к телу,  $R$  - сопротивление среды движению тела в ней.

Обратим внимание на (1). Возникает вопрос: когда  $R = F$ ? Из (1) следует, что это возможно в двух случаях: когда  $m = 0$  и когда  $\ddot{x} = 0$ . Первый случай соответствует первому закону Ньютона, когда на контакте двух тел сила действия равна силе противодействия ( $m = 0$ ). Второй случай соответствует движению тела в среде с контролируемым смещением, когда  $\ddot{x} = 0$ ,  $\dot{x} = C_1$ ,  $x = C_1t + C_2$  ( $C_1, C_2$  - постоянные).

Представим теперь преграду для рассматриваемого движущегося тела с массой  $m$ . Пусть эта преграда имеет толщину  $H$ . Будем вдавливать в преграду данное тело с постоянной скоростью  $\dot{x} = C_1$  до полного проникновения. В результате этого нагружения на каждом этапе изменения  $x = C_1 t$  ( $x|_{t=0} = 0$ ) измеряем прикладываемую силу  $F$  и, следовательно, находим зависимость  $R(=F) = R(x)$ . По вполне понятным причинам она будет иметь вид рис. 1.

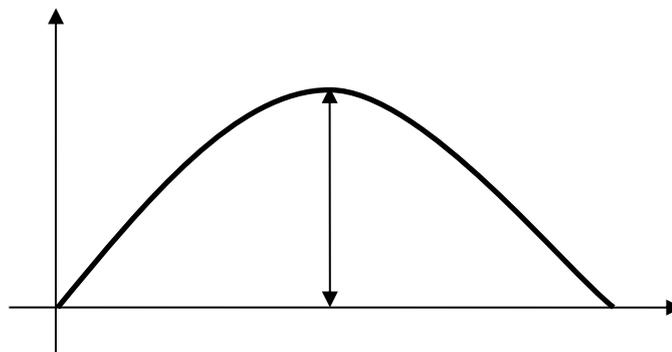


Рис. 1. Зависимость сопротивления среды продвижению в ней пробойника с массой  $m$  при постоянной скорости внедрения, полученной на испытательной машине жесткого типа

Аппроксимируем зависимость реактивной силы  $R$  на рис. 1. в виде одной арки синусоиды:

$$R = A \sin \alpha x, \quad (2)$$

где параметр  $\alpha$  положим равным  $\frac{\pi}{H}$ :

$$\alpha = \frac{\pi}{H} \quad (3)$$

Понятно, что величина  $A$  в (2) может зависеть от скорости нагружения (скорости движения) пробойника. Это влияние здесь не учитывается. Величина  $A$  может зависеть от формы ударника, от физико-механических свойств преграды. В данном исследовании будем считать, что для данной формы ударника  $A$  есть константа.

Вернемся к решению задачи. Пусть ударник в результате какого-то воздействия перед встречей преградой получает некоторую начальную скорость  $V$ , при этом сила  $F$  в (1) отсутствует. Требуется проинтегрировать уравнения движения

$$m\ddot{x} = -A \sin \alpha x, \quad \alpha = \frac{\pi}{H} \quad (4)$$

при начальных условиях

$$x|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = V. \quad (5)$$

Чтобы решить (4), следует понизить порядок дифференциального уравнения (4) с помощью подстановки [20]

$$\dot{x} = P(x). \quad (6)$$

Тогда  $\ddot{x} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = P' \cdot P$ , где  $P' = \frac{dP}{dx}$ .

С учетом (6) получаем следующее дифференциальное уравнение

$$m dP \cdot P = -A \sin(\alpha x) dx. \quad (7)$$

Интегрируя (7), находим

$$\frac{mP^2}{2} = \frac{A}{\alpha} \cos(\alpha x) + C_1. \quad (8)$$

Подставляя в (8) начальные условия (5), находим

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{A}{\alpha} + C_1.$$

Отсюда получаем выражение

$$p^2 = V^2 + \frac{2A}{\alpha m} [\cos(\alpha x) - 1] = V^2 - \frac{4A}{\alpha m} \sin^2 \frac{\alpha x}{2}$$

или

$$p = + \sqrt{V^2 - \frac{4A}{\alpha m} \sin^2 \frac{\alpha x}{2}} = \dot{x} \quad (9)$$

(знак "–" соответствует движения в обратном направлении). Из (9) следует, что  $\dot{x}$  обращается в ноль, когда

$$\sin \frac{\alpha x}{2} = V \sqrt{\frac{\alpha m}{4A}}. \quad (10)$$

Если  $x = H$ , а  $\alpha = \frac{\pi}{H}$ , то из (10) следует, что скорость при этом должна быть

$$V = \sqrt{\frac{4A}{\alpha m}} = 2\sqrt{\frac{AH}{\pi m}}. \quad (11)$$

В случае (11) тело выходит из преграды, но имеет нулевую скорость на выходе.

Если  $V < \sqrt{\frac{4A}{\alpha m}}$ , то есть правая часть (10) остается меньше единицы, то тогда

существуют вещественные значения  $x$ , при которых  $\frac{\alpha x}{2} < \frac{\pi}{2}$  или  $x < H$  и пробойник застревает в преграде. Координата точки, в которой происходит остановка, определяется из (10) следующим образом

$$x = \frac{2}{\alpha} \arcsin \left( V \sqrt{\frac{\alpha m}{4A}} \right). \quad (12)$$

Если  $V$  будет больше величины (11), то это означает, что тело вылетает из преграды со скоростью

$$\dot{x}_b = \sqrt{V^2 - \frac{4A}{\alpha m}}. \quad (13)$$

Из условия (13) с учетом знания скорости вылета тела находим величину

$$A = \frac{(V^2 - \dot{x}_b^2) \pi m}{4H}. \quad (14)$$

Из формулы (11) вытекают такие выводы: чем больше толщина пробиваемого слоя, тем больше требуется создать начальную скорость телу; чем меньше масса тела, тем большую скорость надо создать. Чем больше величина амплитуды  $A$  на рисунке 1, тем больше должна быть начальная скорость.

Далее, рассмотрим движение тела в пробиваемой преграде теле на основе дальнейшего интегрирования уравнения (9). Имеем следующие три случая интегрирования.

Первый случай. Пусть начальная скорость тела определяется формулой (14), то есть  $V^2 = \frac{4A}{\alpha t}$ . Тогда подкоренное выражение в (9) превращается в  $V \cos(\alpha x / 2)$ , где аргумент  $\alpha x / 2$  изменяется в пределах от 0 ( $x = 0$ ) до значения  $\pi / 2$ , ( $x = H$ ). В этом случае величина косинуса положительная и имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{V \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)} = dt,$$

интегралом которого служит выражение

$$\frac{2}{\alpha V} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha x}{4}\right) = t + C_2.$$

Подставляя сюда начальные условия (5), находим  $C_2 = 0$  и выражение для  $x$  в виде:

$$x = \frac{4}{\alpha} \operatorname{arctg} e^{\frac{\alpha V}{2} t} - \frac{\pi}{\alpha},$$

где  $V$  определяется (11),  $\alpha = \pi / H$ . График зависимости  $x = x(t)$  представлен на рис. 2.

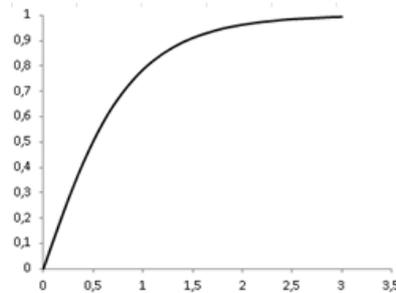


Рис. 2. Зависимость  $x = x(t)$  для первого случая (когда пробойник останавливается на границе с нулевой скоростью)

Рассмотрим второй случай, когда

$$V^2 > \frac{4A}{\alpha t}, \quad (15)$$

то есть тело пролетает через преграду. Представим дифференциальное уравнение (9) в виде

$$\frac{dx}{\sqrt{V^2 - \frac{4A}{\alpha m} \sin^2 \frac{\alpha x}{2}}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{4A}{\alpha m} \cos^2 \frac{\alpha x}{2} + \left(V^2 - \frac{4A}{\alpha m}\right)}} = dt$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{V^2 - \frac{4A}{\alpha m}} \sqrt{1 + \frac{\frac{4A}{\alpha m}}{V^2 - \frac{4A}{\alpha m}} \cos^2 \frac{\alpha x}{2}}} = dt \quad . \quad (16)$$

Обозначим коэффициент при  $\cos^2 \frac{\alpha x}{2}$  как  $p^2$ :

$$p^2 = \frac{\frac{4A}{\alpha m}}{\left(V^2 - \frac{4A}{\alpha m}\right)}, \quad 1 + p^2 = \frac{V^2}{\left(V^2 - \frac{4A}{\alpha m}\right)},$$

тогда после интегрирования находим выражение

$$\frac{2}{\alpha V} F\left(\frac{\alpha x}{2}, \sqrt{\frac{4A}{\alpha m V^2}}\right) = t + C_3 \quad , \quad (17)$$

где  $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}}$  - эллиптический интеграл первого рода [20].

Подставляя сюда начальные условия (5), находим  $C_3 = 0$ . График зависимости  $x = x(t)$  определяется из (17) при условии  $C_3 = 0$ . Он представлен на рис. 3.

Третий случай, когда  $V^2 < \frac{4A}{\alpha m}$ , то есть тело застревает в преграде. В этом случае вместо уравнения (9) получаем уравнение

$$\frac{2d\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\alpha V \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \frac{\alpha x}{2}}} = dt, \quad (18)$$

где

$$q^2 = \frac{4A}{\alpha m V^2} > 1. \quad (19)$$

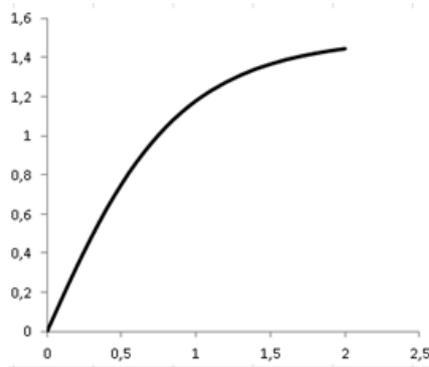


Рис. 3. Зависимость  $x = x(t)$  для второго случая (когда пробойник выходит из тела с ненулевой скоростью)

Интегрируя (18), находим аналогичный предыдущему интеграл

$$\frac{2}{\alpha V} \frac{1}{q} F\left(\beta, \frac{1}{q}\right) = t + C_4, \quad (20)$$

где обозначено  $\beta = \arcsin\left(q \sin \frac{\alpha x}{2}\right)$ ,  $F$  - эллиптический интеграл 1-го рода.

Подставляя начальные условия (5), находим  $C_4 = 0$ . (20) определяет зависимость  $t = t(x)$ . Эта зависимость аналогична рис. 2, только остановка происходит не на границе тела, а внутри него.

### ***Заключение***

В работе рассмотрены три случая проникания твердого тела через преграду: 1) когда тело застревает в преграде; 2) когда оно вылетает из преграды с ненулевой скоростью; 3) когда скорость в момент вылета равна 0.

Исследованы законы движения тела в зависимости от времени.

Показано, как возможно определить сопротивление среды прониканию через начальную скорость и скорость на вылете тела из преграды.

### ***Благодарности***

Работа выполняется в рамках проекта ФНИ № гос. регистрации ААААА17-117121140065-7.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ. – 1956. – 529 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
4. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика тверд. те-ла, – 2000. – № 3. – С. 131 – 136.
5. Соловьев Ю. И. К задаче о пластическом состоянии материала под жестким шероховатым штампом при вне центральном нагружении // ПМТФ. – 1960. – № 1. – С. 110 – 116.
6. Hertz H. Uber die Berührung iester elastischer Korper, J. reine angeu. math. (Crelle), 92, 1881. – 155 pp.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. – ОНТИ, 1935. – 674 с.
8. Daris R. M. The determination os static and dynamic yield stresses using a steel fall. Proc. Roy. Soc. Lon-don., A, 197. – 1949. – 416 pp.
9. Ивлев Д. Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН, 1957. – № 10. – С. 89 – 93.
10. Анисимов А. Н., Хромов А. И. Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона – Мора // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки, – 2007. – № 1 (14). – С. 44 – 49.
11. Давыдов Д. В., Мяснинкин Ю. М. О внедрении тел в жесткопластическую среду // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С. 94 – 100.
12. White M. P. and Griffis L. The propogation of plastieity in uniaxial compression. J. Appl.mech, 15. – 1998. – 256 pp.
13. Taylor G. I. The use flat-ended projectiles for determining Dynamic yield stress. I Theoretical considerations. Proc. Roy. Soc. Lond., A. 194. – 1948. – 289 pp.
14. Thomson W. T. An approximate theory of armor penetretion. J. Appl. Phys., 26. – 1955. – 80 pp.
15. Chanyshev A. I. and Abdulin I. M. The problem solution on wedge penetration in an initially anisotropy medium within the rigid-plastic scheme. In the conference proceedings IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2018, pp. 012011.
16. Чанышев А. И., Абдулин И. М., Гутарова И. В., Ефименко Л. Л., Фролова И. В., Лукьяшко О. А. Состояние полной и неполной пластичности для неравномерно анизотропных сред // Фундаментальные и при-кладные вопросы горных наук, – 2019. – Т. 6. –№ 1. – С. 244 – 249.
17. Данилов Б. Б., Смоляницкий Б. Н., Чанышев А.И., Чецин Д. О. Определение усилий для изменения траек-тории движения пневмопробойника в грунте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2017. – № 4. – С. 69–79.
18. Данилов Б. Б., Смоляницкий Б. Н., Чанышев А.И., Чецин Д. О. Определение радиуса поворота пневмопробойника при изменении траектории его движения в грунте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2018. – № 3. – С. 43–50.
19. Данилов Б. Б., Чанышев А. И., Чецин Д. О. Определение усилий для изменения траектории движения пневмопробойника в грунте // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2017. – Т.2. – № 2. – С. 268 – 272.
20. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

© А. И. Чанышев, О. Е. Белоусова, О. А. Лукьяшко, 2021