

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС МАССИВА ПОРОД ВОКРУГ ВЫРАБОТОК ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЗАДАННЫМИ НА КОНТУРЕ ВЕКТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ КОШИ И СМЕЩЕНИЙ

Анвар Исмагилович Чанышев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный проспект, 54, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, a.i.chanyshev@gmail.com; Новосибирский Государственный Университет Экономики и Управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, Каменская, 52, профессор кафедры МиЕН

Ильгизар Маратович Абдулин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный просп., 54, научный сотрудник, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru

Решается задача об определении НДС массива пород вокруг выработки цилиндрической формы с заданными на ней векторами напряжений Коши и смещений. Предполагается, что материал вокруг выработки находится в упругом состоянии. Вдоль цилиндрической выработки (свободной от напряжений) производятся измерения трех смещений как функций двух координат поверхности (полярного угла и длины вдоль оси симметрии выработки). По данным этих измерений определяются на ее границе все компоненты тензоров напряжений и деформаций, все координаты вектора поворота. Показывается как полученную информацию возможно использовать для оценки НДС массива пород, продвигаясь вглубь массива пород.

Ключевые слова: массив пород, выработка, цилиндрическая поверхность, напряжения, деформации, смещения, вектор поворота

STRESS–STRAIN BEHAVIOR OF ROCK MASS AROUND CYLINDRICAL EXCAVATIONS WITH THE PRESET CAUCHY STRESS STRESSES AND DISPLACEMENTS AT THE BOUNDARIES

Anvar I. Chanyshev

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Dr. Sci. (Phys.-Math.), office: +7 (383) 205 30 30 (716); Novosibirsk State University of Economics and Management, 52 Kamenskaya street, Novosibirsk, 630099, Russia, Professor at the Mathematics and Natural Sciences Department, office: (383)243-94-75, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Igizar M. Abdulin

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Researcher, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru

The authors solve the problem on the stresses and strains of rock mass around a cylindrical excavation with the preset vectors of the Cauchy stresses and displacements at the boundary. It is assumed that the surrounding rock mass is elastic. Along the cylindrical excavation (free of stresses), displacements are measured as functions of two surface coordinates (polar angle and length along the symmetry axis of the excavation). These measurements are used to determine all components of ten-

sors of stresses and strains at the boundary, and all coordinates of rotation vector. It is shown how this information can be used in the stress–strain analysis of rock mass farther from the excavation.

Keywords: rock mass, underground excavation, cylindrical surface, stresses, strains, displacements, rotation vector

Введение

Существует множество работ, которые посвящены оценке напряженно-деформированного состояния материалов вокруг отверстий [1-4]. Если говорить о горном деле, то здесь уместно под отверстиями понимать выработки различных форм и конфигураций. Интересует то, как распределены напряжения, деформации вокруг выработок, где происходит концентрация напряжений, когда ожидать катастрофических событий типа горных ударов и выбросов [5-8].

В данной работе рассматривается круговая цилиндрическая выработка радиуса a , на свободной границе которой задаются три смещения как функции координат поверхности. Возникает вопрос: возможно ли по этим данным восстановить НДС цилиндрической поверхности. Отметим, что задачи подобного вида составляют основу экспериментально-аналитического метода исследования, развиваемого в ИГД СО РАН с 70-х годов прошлого столетия [9-13].

Основная часть

Рассматривается выработка цилиндрической формы, имеющая круговое сечение (рис. 1).

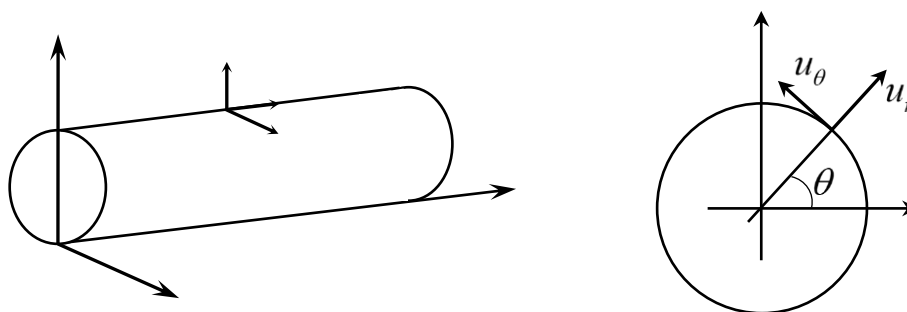


Рис. 1. Выработка в виде кругового цилиндра с заданными на границе вектором напряжений Коши и вектором смещений

Уравнение кругового сечения определим как

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ или } r = R,$$

где r, θ, z – цилиндрические координаты. Пусть на контуре этой выработки в какой-то момент времени t определены все три смещения как функции координат поверхности:

$$u_r = \varphi(\theta, z), u_\theta = \psi(\theta, z), u_z = \chi(\theta, z). \quad (1)$$

Отметим, что здесь никаких предположений о плоском деформированном состоянии массива пород вокруг выработки не делается. Возникает задача определения НДС массива пород как на самом контуре выработки, так и вблизи него.

Для решения поставленной задачи имеем тензоры напряжений T_σ , деформаций T_ε , записанные в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix}, T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_\theta & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

соотношения Коши, связывающие деформации (2) со смещениями u_r, u_θ, u_z в виде [14]:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (3)$$

Кроме соотношений (3) имеем зависимости для определения компонент вектора поворота [14]:

$$\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\ \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \omega_z = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Задача состоит в том, чтобы по известным функциям (1) определить тензоры T_σ и T_ε в (2) и, кроме того, найти (4). Для решения задачи будем предполагать, что материал как на самом контуре выработки, так и в соседних с ним областях находится в упругом состоянии, т.е. выполняется закон Гука:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)], \\ \sigma_\theta = \dots, \\ \sigma_z = \dots, \\ \tau_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta}, \tau_{\theta z} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\theta z}, \tau_{rz} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{rz}, \end{cases} \quad (5)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Запишем уравнения равновесия среды на контуре выработки:

$$\begin{cases} -\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta = p_r, \\ -\tau_{r\theta} \cos \theta - \sigma_\theta \sin \theta = p_\theta, \\ -\tau_{rz} \cos \theta - \tau_{z\theta} \sin \theta = p_z. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\vec{n} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$ – вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности выработки, p_r, p_θ, p_z – компоненты вектора напряжений Коши. Будем считать, что контур выработки свободен от напряжений. Это означает, что

$$p_r = p_\theta = p_z = 0. \quad (7)$$

Приведем решение поставленной задачи. Из (3) для деформации ε_θ получаем выражение

$$\varepsilon_\theta|_{r=R} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi(\theta, z)}{\partial \theta} + \frac{\varphi(\theta, z)}{R}, \quad (8)$$

где ψ, φ – заданные функции (1). Таким же образом из (3) находим

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \chi(\theta, z)}{\partial z}. \quad (9)$$

Чтобы найти ε_r и деформацию $\varepsilon_{r\theta}$ воспользуемся уравнениями равновесия (6), (7), законом Гука (5), который при подстановке в (6), (7) дает следующие два уравнения:

$$\begin{cases} (1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + (1-2\nu)\varepsilon_{r\theta} \operatorname{tg} \theta = 0, \\ \nu \operatorname{tg} \theta \varepsilon_r + (1-\nu) \operatorname{tg} \theta \varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_z \operatorname{tg} \theta + (1-2\nu)\varepsilon_{r\theta} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

В этой системе уравнений неизвестными являются величины $\varepsilon_r, \varepsilon_{r\theta}$. Из нее находим

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{\cos^2 \theta - \nu} [\varepsilon_\theta (\sin^2 \theta - \nu) - \varepsilon_z \nu \cos 2\theta], \\ \varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{2(\cos^2 \theta - \nu)} [\varepsilon_\theta + \varepsilon_z \nu]. \end{cases} \quad (11)$$

Далее, из третьего уравнения равновесия (6) и при условиях (7) и законе Гука (5) следует, что

$$\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{z\theta} \operatorname{tg} \theta = 0.$$

Отсюда с применением соотношений Коши (3) получаем зависимость

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \operatorname{tg} \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0, \quad (12)$$

а из найденного выражения для $\varepsilon_{r\theta}$ (11) устанавливаем

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (13)$$

Выражения (12), (13) составляют систему уравнений для отыскания неизвестных величин $\partial u_z / \partial r$, $\partial u_\theta / \partial r$. Из (13) следует, что

$$\left. \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\varepsilon_{r\theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi(\theta, z)}{\partial z} + \frac{\psi(\theta, z)}{R}. \quad (14)$$

Из (12) при условии (14) устанавливаем

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\partial \varphi(\theta, z)}{\partial z} - \operatorname{tg} \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi(\theta, z)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\psi(\theta, z)}{R} \right). \quad (15)$$

Рассматривая (4), видим, что все величины здесь находятся:

$$\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial \chi(\theta, z)}{\partial \theta} - r \frac{\partial \psi(\theta, z)}{\partial z} \right), \\ \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi(\theta, z)}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \omega_z = \frac{1}{2r} \left(\psi(\theta, z) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \varphi(\theta, z)}{\partial \theta} \right). \end{cases}$$

Таким образом задача восстановления всех деформаций и всех компонент вектора поворота решается до конца. Чтобы найти компоненты тензора T_σ используется закон Гука (5).

Выводы

В работе определены все компоненты тензоров деформации и напряжений на контуре цилиндрической выработки по заданным на ее границе векторам напряжений Коши и смещений. Кроме этого находятся также все компоненты вектора поворота.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: Основные уравнения: Плоская теория упругости: Кручение и изгиб. – М.: АН СССР, 1954. – 648 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 940 с.
5. Петухов И. М., Линьков А. М. Механика горных ударов и выбросов. – М.: Недра, 1983. – 280 с.
6. Еременко А. А., Федоренко А. И., Копытов А. И. Проведение и крепление горных выработок в удароопасных зонах железорудных месторождений. – М.: Наука, 2008. – 236 с.
7. Турчанинов И. А., Марков Г. А., Иванов В. И., Козырев А. А. Тектонические напряжения в земной коре и устойчивость горных выработок Ленинград: Наука Ленинградское отделение, 1978. – 256 с.
8. Тарасов Б. Г., Дырдин В. В., Иванов В. В. Геоэлектрический контроль состояния массивов. – М.: Недра, 1983. – 216 с.
9. Грицко Г. И., Власенко Б. В., Мусалимов В. М. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте // ФТПРПИ. – 1971. – № 1. – С. 3–10.
10. Грицко Г. И., Власенко Б. В., Шемякин Е. И. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в массиве горных пород. – Новосибирск: Наука, 1976. – 190 с.
11. Грицко Г. И., Цыцаркин В. Н. Определение напряженно-деформированного состояния массива вокруг напряженных пластовых выработок экспериментально-аналитическим методом // ФТПРПИ. – 1995. – № 3. – С. 18–21.
12. Миренков В. Е., Шутов В. А., Полуэктов В. А. Экспериментально-аналитическое определение контактных условий // Изв. вузов “Строительство”. – 2010. – № 5 (617). – С. 10–15.
13. Акимов В. С., Цыцаркин В. Н. Определение границы области неупругих деформаций вокруг круговой выработки // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. – Новосибирск, 1979. – С. 84–87.
14. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 1966. – 229 с.

© А. И. Чаньшев, И. М. Абдулин, 2021