

## **ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ТРЕЩИН МНОЖЕСТВЕННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ВЯЗКИМ ФЛЮИДОМ**

*Антон Владимирович Панов*

Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный проспект, 54, младший научный сотрудник лаборатории горной информатики, тел. (383)205-30-30 доп. 173, e-mail: anton-700@yandex.ru

*Игорь Владимирович Колыхалов*

Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный проспект, 54, младший научный сотрудник лаборатории механики взрыва и разрушения горных пород, тел. (383) 335-96-54, e-mail: ikolykhalov@mail.ru

Проведено экспериментальное и численное моделирование криволинейного развития трещин гидроразрыва, нагружаемых вязкой жидкостью. Приведены траектории одновременного роста 2-5 трещин с границы кругового отверстия в плоской постановке теории упругости. Проанализировано влияние вязкости нагнетаемой жидкости на траекторию роста трещин. Выявлены причины появления магистральных и остановки других трещин. Путем варьирования параметров длины начальных трещин и угла ориентации их во внешнем неоднородном поле сжатия произведены попытки поиска конфигурации условий при которых возможен одновременный рост нескольких магистральных трещин. Экспериментальное моделирование гидроразрыва было проведено на блоках из оргстекла. Количество начальных трещин от 3 до 5. Показано влияние вязкой жидкости на количество магистральных трещин. С использованием пластичного материала удалось в пределах блоков получить одновременное развитие 3 и 4 трещин. Проведено сравнение проведенных экспериментов с численными расчетами.

**Ключевые слова:** система трещин гидроразрыва, продольная трещина гидроразрыва, вязкость жидкости, траектория трещин, численное моделирование гидроразрыва, экспериментальное моделирование гидроразрыва

## **NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF PROPAGATION OF LONGITUDINAL FRACTURES IN MULTI-STAGE HYDRAULIC FRACTURING WITH VISCOUS FLUID**

*Anton V. Panov*

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Junior Researcher at the Mining Information Science Laboratory, office: +7 (383) 205 30 30 ext. 173, e-mail: anton-700@yandex.ru

*Igor V. Kolykhalov*

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 54 Krasny prospect, Novosibirsk 630091, Russia, Junior Researcher at the Laboratory of Explosion Mechanics and Rock Fracture, office: (383) 335 96 54, e-mail: ikolykhalov@mail.ru

The experimental and numerical modeling of curvilinear propagation of hydraulic fractures driven by viscous fluid is implemented. The trajectories of simultaneous growth of 2–5 fractures from the boundary of a circular opening are presented in plane elasticity. The influence of the fluid

viscosity on the fracture trajectory is analyzed. The causes of initiation of main fracture and shut-down of other fractures are revealed. The attempts are made to find such conditions that simultaneous growth of a few main fractures is possible by varying lengths and orientation angles of initiation fractures in the external nonuniform field of compression. The experimental modeling of hydraulic fractures was carried out using blocks made of concrete and organic glass. There were 3 to 5 initiation fractures. The influence of the breakdown fluid viscosity on the number of the main fractures is illustrated. Hydraulic fracturing with a plastic material allowed simultaneous growth of 3 and 4 fractures within a block. The experimental modeling data and the calculation results are compared.

**Keywords:** system of hydraulic fractures, longitudinal hydraulic fracture, breakdown fluid viscosity, fracture trajectory, numerical modeling of hydraulic fracturing, experimental modeling of hydraulic fracturing

## *Введение*

Гидроразрыв пласта — один из высокоэффективных методов интенсификации добычи углеводородов из газовых и нефтяных скважин. Применение гидроразрыва позволяет увеличивать дебит скважин [1, 2], проводить дегазацию угольных и сланцевых пластов [3-6], совершенствовать технологии правления состоянием массива горных пород [7, 8], производить оценки компонент природного поля напряжений [9]. При интенсификации добычи из низкопроницаемых коллекторов широкое применение получила технология множественного гидроразрыва пласта [10-12]. Для достижения наилучшего результата ГРП требуется создание трещины нужной формы и размера. На геометрию развивающейся трещины существенное влияние оказывают: разность главных напряжений, вызванных горным давлением; наличие трещин, режим нагнетания и свойства жидкости.

Развитие продольных трещин рассматривается в плоской постановке теории упругости. Плоская задача гидроразрыва с использованием вязкой жидкости, как задача механики трещин, впервые поставлена в [13]. Асимптотический метод ее решения был развит для длительной закачки и больших утечек жидкости в [14,15]. Математические трудности связаны с необходимостью одновременного нахождения деформации проницаемой твердой среды и параметров течения жидкости, нагнетаемой в трещину, причем геометрия самой трещины формируется в процессе разрыва и заранее неизвестна. Наличие малого параметра (смещение берегов) позволяет перенести условие сопряжения на срединную плоскость трещины, но и после этого упрощения система уравнений остается сложной. Даже для изолированной прямолинейной трещины, растущей при нагнетании вязкой жидкости с учетом утечек и сжимающего напряжения (минимального), действующего в направлении, ортогональном развитию трещины, решение задачи сводится к нахождению решения системы из четырех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [16,17].

Отличие нашего подхода моделирования роста трещин гидроразрыва от других [18-23] заключается в его достаточно простой реализации и быстром расчете. В [24] мы получили простой алгоритм нахождения приближенных решений задач гидроразрыва, на основе которого можно делать оценочные расчеты.

Использовали предположение: нормальные смещения берегов трещин пропорциональны эффективным нормальным напряжениям, приложенным к ее берегам, и расход жидкости по длине трещины сохраняется [25]. А скорость трещины в любой момент времени находилась из интегрального закона сохранения массы жидкости.

Цель работы состоит в том, что, используя алгоритм построения трещин гидроразрыва, полученный в [24], произвести численное моделирование криволинейного развития трещин гидроразрыва; сравнить проведенные эксперименты с численными расчетами.

### Постановка задачи

Граница скважины, ось которой совпадает с осью  $Oz$ , изображена на рис. 1 в плоскости  $z = 0$  как окружность с радиусом  $r$ . В начальный момент времени на границе кругового отверстия имеется  $N$  зародышевых трещин длиной  $l_0(j)$ , и их положение на контуре определяется углами  $\alpha_i = \alpha_0 + 2\pi \cdot (i-1)/N$ ,  $i = \overline{1, N}$ . На бесконечности действуют сжимающие напряжения  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . Направление максимального сжатия  $\sigma_{\max}$  параллельно оси  $Oy$ . Горная порода моделируется изотропным упругим телом, находящимся в условиях плоской деформации.

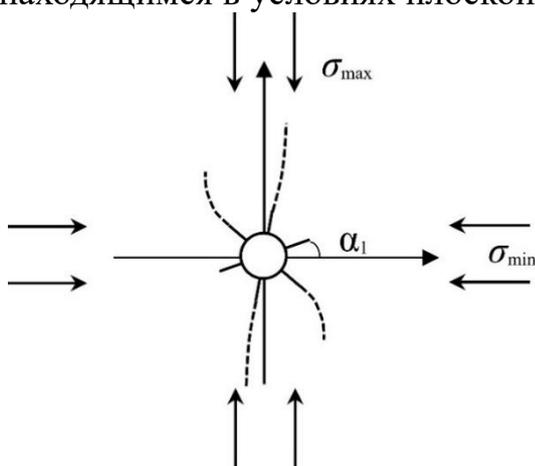


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи с продольными трещинами гидроразрыва.

В [24] подробно изложены выкладки для нахождения решения роста криволинейной трещины, развивающейся под действием нагнетания в скважину вязкой жидкости. Отметим, что используются уравнения сохранения объема закачиваемой жидкости, уравнение скорости роста трещины, избыточное давление в трещине вдоль ее длины. А направление приращения длины трещины определяется из условия что бы в этом направлении  $\sigma_{\theta\theta}$  достигала максимума, а  $\sigma_{r\theta} = 0$ . При использовании вязкой жидкости приводит к тому, что на границе отверстия (1) и берегах трещины (2)-(3) выполняются следующие граничные условия:

$$\sigma_n = -p(t), \tau_s = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_n = -p_1(x,t), \quad p(t) = p_1(0,t), \quad (2)$$

$$\tau_s = 0, \quad (3)$$

где  $\sigma_n$  и  $\tau_s$  — нормальные и касательные напряжения.

На рис. 2-5 приведены траектории расчетов роста 2-5 продольных трещин при различной вязкости нагнетаемой жидкости  $\mu_0$  в условиях плоской деформации. Утечки во вмещающую породу отсутствуют, расход в скважину постоянный  $q_0$ . Расчеты проводились при следующих параметрах (если не указано другое значение):  $r = 70\text{мм}$ ,  $l_0 = 2r$ ,  $\alpha_0 = 15^\circ$ ; параметры среды: модуль Юнга  $E = 2,8 \cdot 10^4 \text{МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , вязкость разрушения  $K_{IC} = 2 \text{МПа} \cdot \text{м}^{0,5}$ ; сжимающие напряжения равны:  $\sigma_{\max} = 39,5 \text{МПа}$ ,  $\sigma_{\min} = 38,5 \text{МПа}$ ; коэффициент утечек  $C = 0 \text{м/с}^{0,5}$ , расход  $q_0 = 0,05 \text{м}^3/\text{с}$ , высота трещины  $h = 20 \text{м}$ , вязкость закачиваемой жидкости  $\mu_0 = 0.005 \div 100 \text{Па} \cdot \text{с}$ . Так как эффективное давление внутри трещины зависит от произведения  $\mu_0 \cdot q_0$ , для простоты восприятия в расчетах варьировать будем только вязкость  $\mu_0$ .

На рис. 2 приведены траектории роста двух трещин при различной вязкости закачиваемой жидкости. Видно, что с увеличением вязкости траектории трещин спрямляются. И наоборот, чем жидкость менее вязкая, тем быстрее трещина поворачивается, ориентируясь по направлению действия максимального сжимающего напряжения (вдоль оси  $y$ ).

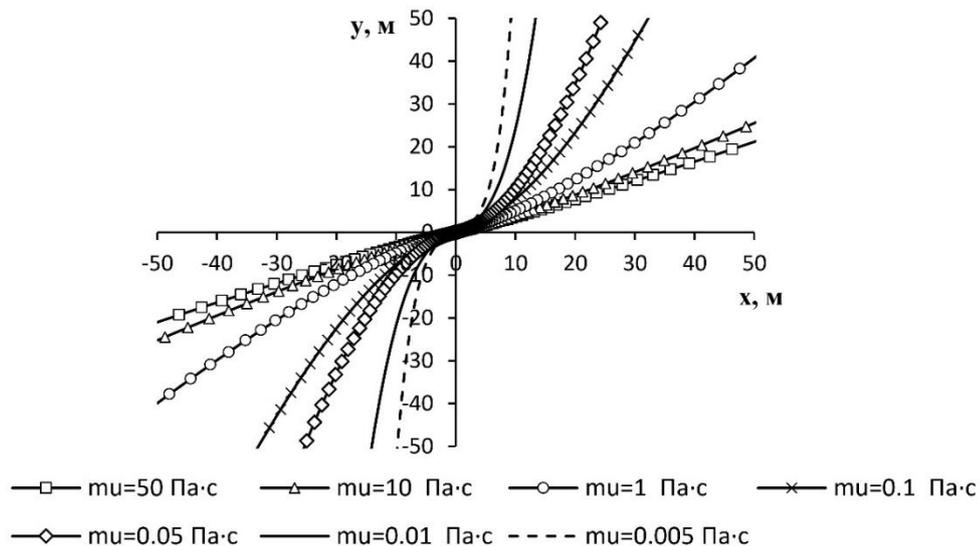


Рис. 2. Траектории роста двух трещин при вариации вязкости жидкости  $\mu_0(\text{Па} \cdot \text{с})$

На рис. 3 приведены расчеты траекторий роста трёх трещин гидроразрыва. Можно отметить, что при вязкости  $\mu_0 \leq 0,1$  Па·с развиваются только две трещины из трех (рис. 3а). Изначально одна из трещин имеет невыгодную ориентацию (практически перпендикулярно максимальному сжатию), она растет медленнее других и останавливается. Остановка происходит из-за двух факторов: передавливание трещины на устье скважины; увеличивающееся дополнительное поле сжатия от двух растущих трещин. Две растущие трещины меняют свою траекторию после остановки третьей трещины. Чем больше вязкость жидкости, тем дальше прорастает останавливающаяся трещина. Так при  $\mu_0 = 0,01$  Па·с третья трещина удлинилась на 8 м, после чего рост остановился; при  $\mu_0 = 0,05$  Па·с – 17 м; при  $\mu_0 = 0,1$  Па·с – 24 м. При  $\mu_0 \geq 1$  Па·с растут одновременно все три трещины в разные стороны друг от друга (рис. 3б).

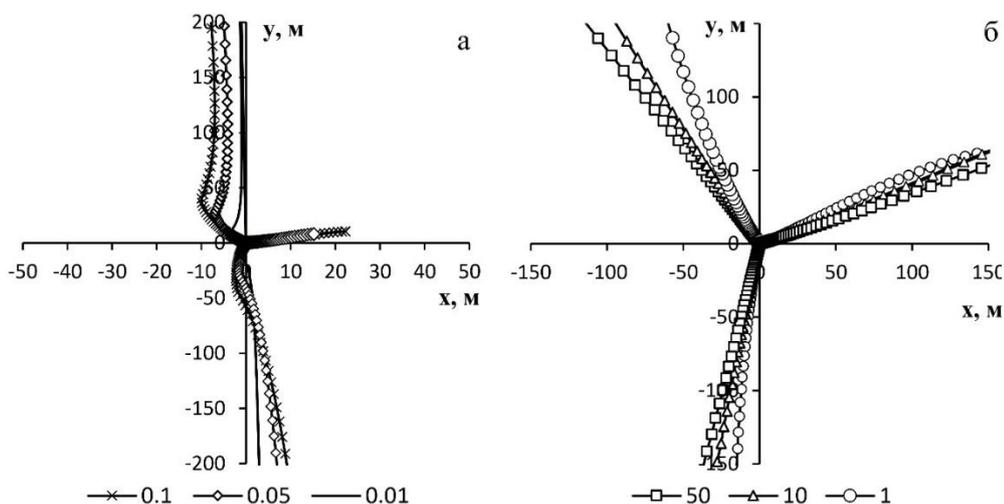


Рис. 3. Траектории трех трещин при различной вязкости жидкости  $\mu_0$  (Па·с)

Рассмотрим рост четырех трещин (рис. 4). При сохранении тех же параметров, что и при предыдущих расчетах (на рис. 2-3) растут только две трещины, даже при  $\mu_0 \geq 50$  Па·с (рис. 4а). Увеличим длину зародышевой трещины  $l_0$  от 0.14 м до 2.8 м. Как видим, увеличение длины привело к некоторому росту двух других трещин. Так при  $l_0 = 1,4$  м вторая и четвертая замолкающие трещины выросли до 1,5 м, а при  $l_0 = 2,8$  м до 15,6 м (рис. 4б). Чем больше начальная длина трещины, тем «легче» трещине расти при прочих равных условиях.

Попробуем изменить угол наклона трещин относительно главного сжимающего напряжения так, чтобы начали расти одновременно все четыре трещины. Очевидно, что это угол  $45^\circ$ . Как видно из рис. 5 такая ориентация не дала нужного результата. Как только появляется хотя бы малейшее отклонение от симметрии, сразу же появляются две лидирующие трещины, другие две замедляют

свое развитие и останавливаются под воздействием поля сжатия двух лидирующих трещин.

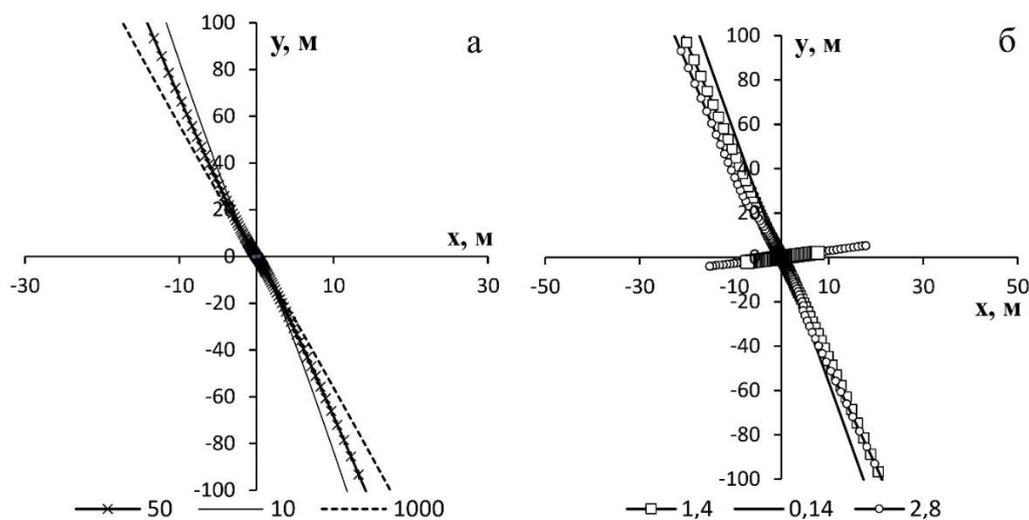


Рис. 4. Траектории роста четырех трещин:  
а) при различных  $\mu_0$  (Па·с), б) при различных  $l_0$  (м)

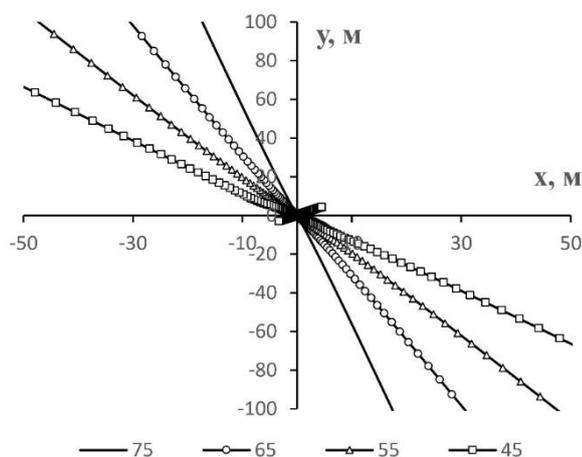


Рис. 5. Траектории развития четырех трещин при вариации угла наклона  $\alpha_0$   
(  $\mu_0 = 100$  Па·с,  $l_0 = 0,14$  м)

На рис. 5а приведены траектории роста пяти трещин ( $\alpha_0 = 15^\circ$ ). Как видно из рисунка первая и третья трещины не росли. В «выгодном» положении для роста оказались вторая и пятая трещины. Четвертая трещина развивалась уже в зависимости от вязкости закачиваемой жидкости. Так при  $\mu_0 = 0,1$  Па·с четвертая трещина выросла до 5,3 м; при  $\mu_0 = 1$  Па·с -  $L_4 = 11,5$  м; при  $\mu_0 = 10$  Па·с -  $L_4 = 22,5$  м; при  $\mu_0 = 100$  Па·с -  $L_4 = 49,5$  м.

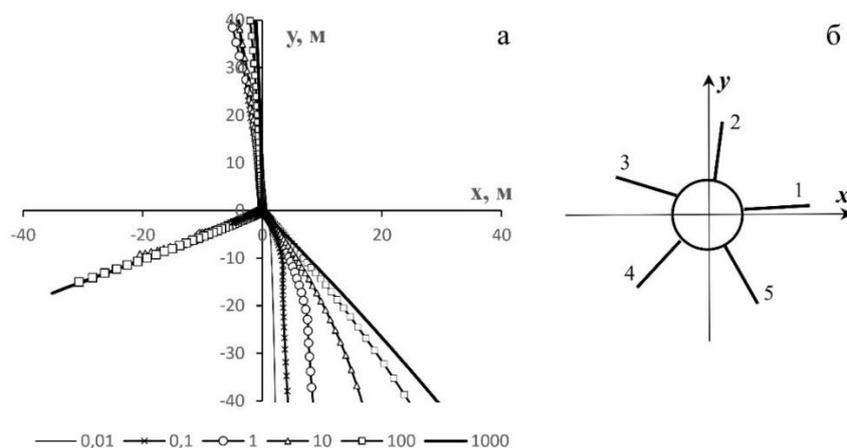


Рис. 6. Траектории пяти трещин:  
а) при различных  $\mu_0$  (Па·с), б) схема расположения начальных трещин

Отметим, что вязкость жидкости является одним из определяющих траекторию параметров. Чем выше вязкость, тем медленнее трещины разворачиваются по направлению действия максимального сжимающего напряжения. Высокая вязкость способствует развитию трещин в неоднородных полях напряжений. Если требуется развитие системы из нескольких продольных трещин, то необходимо подавать более вязкую жидкость.

### Экспериментальное моделирование

Эксперименты по изучению процесса развития трещины гидроразрыва проводились на специально созданном стенде одноосного нагружения. Стенд состоит из трех металлических плит с восемью равномерно распределенными смотровыми щелями, две из которых параллельно жестко закреплены между собой металлическими шпильками, а третья может свободно двигаться между ними (рис. 7).

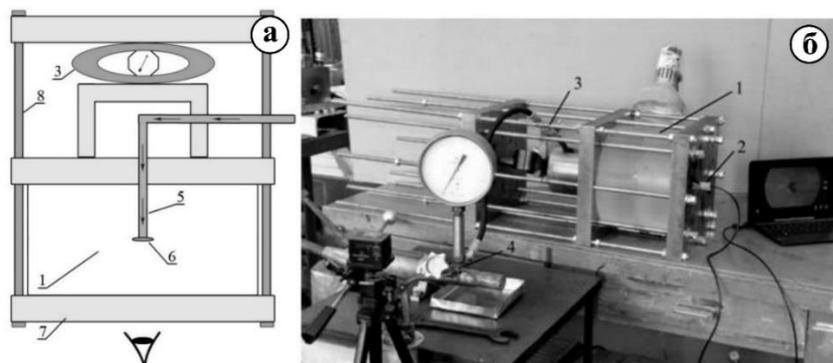


Рис. 7. Схема лабораторного стенда (а), внешний вид стенда (б)  
1 - образец из оргстекла, 2 – смотровые щели, видеокамера для съемки проекции формы трещины на плоскость зародышевой трещины, 3 – динамометр, 4 - нагнетающее устройство, 5 – скважина, 6 – зародышевая трещина, 7 – металлические плиты, 8 - шпилька

Одноосное нагружение производилось с помощью винтового механизма через динамометр ДОСМ-3-50. В качестве рабочей среды использовались блоки из полиметилметакрилата (оргстекло марки ТОСН, ГОСТ 17622-72) цилиндрической формы размером 260x260x110 мм. В центре блока создавалось отверстие, имитирующее скважину. Отверстие присоединялось с помощью резьбового соединения с гидравлической системой для подачи жидкости гидроразрыва. В качестве рабочего флюида использовались водные растворы глицерина CAS No 56-81-5 и колеровочной пасты, изготовленной по ТУ 2332-014-76174671-2005, а также пластилин ОСТ 6-15-1525-86. Жидкость с известной вязкостью подавалась с заданным расходом. Вязкость измерялась с помощью вискозиметров ВПЖ-4. В ходе эксперимента фиксировались величина давления закачиваемой жидкости и форма трещины.

Отверстие, имитирующее скважину, имело диаметр 12 мм. Зародышевые трещины представляли собой продольные пропилы стенки скважины длиной 15 мм, глубиной 5 мм и шириной 1 мм. Количество зародышевых трещин варьировалось от 2 до 5.

На рис. 8 приведены результаты гидроразрыва для различного количества зародышевых трещин: а, б, в – 3 зародышевые трещины; г – 4; д – 5 трещин. При использовании низковязких жидкостей образуется одна продольная трещина с одним крылом независимо от количества зародышевых трещин (рис. 8а), при увеличении вязкости или расхода жидкости образуется две трещины (два крыла). Три зародышевые трещины нам не удалось развить с помощью вязкой жидкости, ввиду предельных характеристик используемых оборудования и жидкости ( $q_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{с}$ ,  $\mu_0 \sim 1400 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ ). С использованием же пластичного материала (пластилина) все три трещины растут устойчиво. Также с использованием пластилина возможно одновременное развитие четырех продольных трещин (рис. 8г). В случае с пятью трещинами и более, устойчивое развитие наблюдается у трех, остальные затухают на длине примерно 1-2 диаметра скважины.

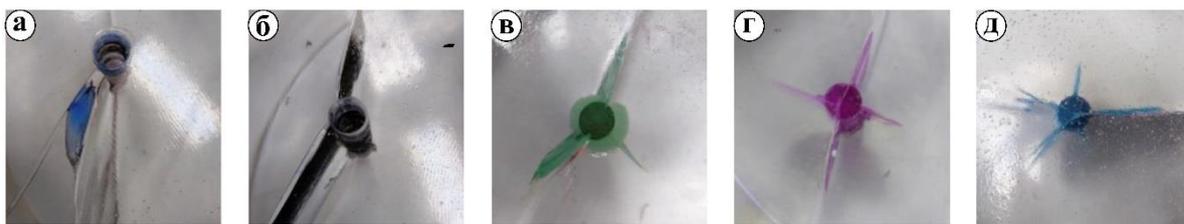


Рис. 8. Продольные трещины в образцах из оргстекла после проведения:

$$\begin{array}{l}
 \text{а} \quad - \quad \mu_0 = 20 \text{ мПа} \cdot \text{с} \quad , \quad q_0 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{с} \quad ; \quad \text{б} \quad - \quad \mu_0 = 900 \text{ мПа} \cdot \text{с} \quad , \\
 q_0 = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{с} \quad , \quad \text{в, г, д} \quad - \quad \text{пластический материал} \quad q_0 = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{с}
 \end{array}$$

Для условий экспериментов развития продольных трещин также были проведены численные расчеты. Параметры задачи, используемые в расчетах:

$N = 3 \div 5$ ,  $r = 6$  мм,  $E = 3,3 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $K_{1C} = 1,4$  МПа $\cdot$ м<sup>0,5</sup>,  $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = 0$ ,  $C = 0$ ,  $q_0 = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/с,  $h = 15$  мм, вязкость закачиваемой жидкости  $\mu_0 = 15 \div 1200$  мПа $\cdot$ с. Для реалистичности условий, внесем в расчеты неустойчивость в виде разных длин зародышевых трещин:  $l_0(i) = (4 + i)$  мм,  $i = 1 \div N$ . Рассмотрим сначала три зародышевые трещины. Перебрав большое количество вариаций, мы обнаружили, что при  $\mu_0 < 50$  мПа $\cdot$ с может развиваться одна трещина из трех. При этом наблюдался прерывистый рост двух других трещин, по мере развития длинной. Они круто разворачиваются в противоположную сторону от длинной трещины и останавливаются, пройдя незначительное расстояние (рис. 9). При повышении вязкости  $\mu_0 > 50$  мПа $\cdot$ с наблюдался рост двух трещин. Третья трещина не развивалась, даже при повышении вязкости до  $10^5$  мПа $\cdot$ с.

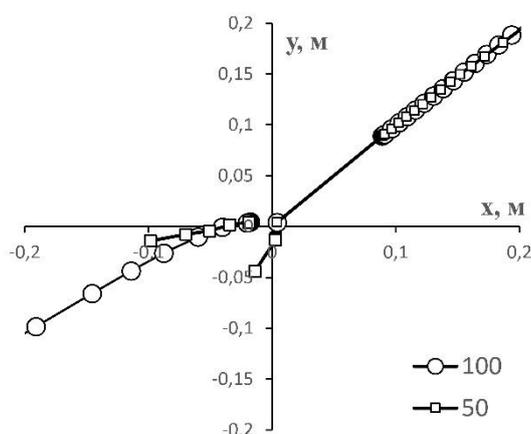


Рис. 9. Рост трех трещин при  $\mu_0 = 50, 100$  мПа $\cdot$ с

При  $N=5$  наблюдались те же самые закономерности, что и при  $N=3$ . Из пяти трещин наблюдался устойчивый рост только двух. Попытки найти конфигурацию из зародышевых трещин при которой развивались бы все 5 трещин не увенчались успехом. С повышением вязкости начинают страгиваться и другие трещины, их рост носит неустойчивый характер, итоге растут только две трещины из пяти.

### Заключение

Проведена серия расчетов одновременного развития продольных трещин множественного гидроразрыва вязкой жидкостью с использованием разработанного численного алгоритма в плоской постановке теории упругости. Выявлены зависимости искривления траекторий трещин и количества активных трещин от конфигурации зародышевых трещин, скорости нагнетания и вязкости рабочей жидкости.

Проведена серия экспериментов по одновременному созданию нескольких продольных изначально радиальных трещин множественного флюидоразрыва

вязкой жидкостью и пластическим материалом. Выявлено, что с использованием высоковязкой жидкости возможно создание системы из трех трещин. С уменьшением вязкости или расхода нагнетания количество трещин уменьшается. Пластическим материалом возможно создать систему из 4 или 5 трещин. Но в случае с пятью трещинами в процессе роста две трещины затухают и остаются три «магистральные» трещины. Данное наблюдение также подтверждается в численных расчетах.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и образования Российской Федерации проект № АААА-А17-117121140065-7.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Galimov I. F., Gubaydullin F. A., Vakhin A. V. Intensification of oil production by hydraulic fracturing method from terrigenous reservoirs in depleting oil field //Petroleum Science and Technology. – 2018. – Т. 36. – №. 8. – С. 591-596.
2. Gurianov A. et al. Estimation of the Largest Russian Oil Field Development Efficiency Using the Combination of Hydrodynamic Modeling and Horizontal Well Production Logging Methods Using Markers //SPE Russian Petroleum Technology Conference. – Society of Petroleum Engineers, 2019.
3. Liu Y., Xia B., Liu X. A novel method of orienting hydraulic fractures in coal mines and its mechanism of intensified conduction //Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2015. – Т. 27. – С. 190-199.
4. Guanhua N. et al. Improving the permeability of coal seam with pulsating hydraulic fracturing technique: a case study in Changping coal mine, China //Process Safety and Environmental Protection. – 2018. – Т. 117. – С. 565-572.
5. Guo T. et al. Numerical simulation of hydraulic fracture propagation in shale gas reservoir //Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2015. – Т. 26. – С. 847-856.
6. He Q., Suorineni F. T., Oh J. Review of hydraulic fracturing for preconditioning in cave mining //Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2016. – Т. 49. – №. 12. – С. 4893-4910.
7. Kang H. et al. Understanding mechanisms of destressing mining-induced stresses using hydraulic fracturing //International Journal of Coal Geology. – 2018. – Т. 196. – С. 19-28.
8. Puller J. W. et al. In-situ stress measurements and stress change monitoring to monitor overburden caving behaviour and hydraulic fracture pre-conditioning //International Journal of Mining Science and Technology. – 2016. – Т. 26. – №. 1. – С. 103-110.
9. Luo W. et al. Productivity of multiple fractures in a closed rectangular reservoir //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2017. – Т. 157. – С. 232-247.
10. Wenrui H. U., Yi W. E. I., Jingwei B. A. O. Development of the theory and technology for low permeability reservoirs in China //Petroleum Exploration and Development. – 2018. – Т. 45. – №. 4. – С. 685-697.

11. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта //Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. – 1955. – №. 5. – С. 3-41.
12. Geertsma J. et al. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures //Journal of petroleum technology. – 1969. – Т. 21. – №. 12. – С. 1571-1581.
13. Nordgren R. P. et al. Propagation of a vertical hydraulic fracture //Society of Petroleum Engineers Journal. – 1972. – Т. 12. – №. 04. – С. 306-314.
14. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. — 1999. — № 3. – С. 269-275.
15. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Точное решение одной классической задачи гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2001. — № 5. – С. 493-503.
16. Zeng Q., Liu W., Yao J. Numerical modeling of multiple fractures propagation in anisotropic formation //Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2018. – Т. 53. – С. 337-346.
17. Chen X. et al. Numerical investigation for simultaneous growth of hydraulic fractures in multiple horizontal wells //Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2018. – Т. 51. – С. 44-52.
18. Taleghani A. D., Gonzalez M., Shojaei A. Overview of numerical models for interactions between hydraulic fractures and natural fractures: challenges and limitations //Computers and Geotechnics. – 2016. – Т. 71. – С. 361-368.
19. Zhou L. et al. A new three-dimensional numerical model based on the equivalent continuum method to simulate hydraulic fracture propagation in an underground coal mine //Rock mechanics and rock engineering. – 2019. – Т. 52. – №. 8. – С. 2871-2887.
20. Detournay E. Mechanics of hydraulic fractures //Annual Review of Fluid Mechanics. – 2016. – Т. 48. – С. 311-339.
21. Мартынюк П. А., Панов А. В. О развитии нескольких трещин гидроразрыва в двуосном поле сжатия с учетом утечек и вязкости флюида //Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2013. – №. 1. – С. 22-33.
22. Линьков А. М. Численное моделирование течения жидкости и продвижения трещины гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2008. — № 1. – С. 26-46.

© А. В. Панов, И. В. Колыхалов, 2021