УДК 528.1
DOI: 10.33764/2618-981X-2021-1-40-48

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПСЕВДОНОРМАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УРАВНИВАНИЯ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

Амридон Гемзаевич Барлиани
Сибирская государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35, e-mail: agbarliani@mail.ru

Галина Александровна Нефедова
Сибирская государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35

Ирина Викторовна Карнетова
Сибирская государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35

В геодезической практике при проектировании и уравнивании геодезических сетей различного назначения на ЭВМ приходится решать плохо обусловленные системы линейных нормальных уравнений. В таких системах детерминант матрицы уравнений стремится к нулю, поэтому применение метода наименьших квадратов приводит к большим искажениям оцениваемых параметров. Более того, в подобных ситуациях для алгоритма метода наименьших квадратов незначительные искажения входных данных приводят к недопустимо большим искажениям конечных результатов уравнивания и оценки точности. В связи с этим предлагается применение метода псевдонормальной оптимизации. Представленная работа посвящена исследованию устойчивости решения задачи уравнивания и оценки точности, получаемой на основе метода псевдонормальной оптимизации. Новизной в рассматриваемой работе является полученный алгоритм оценки относительной погрешности метода псевдонормальной оптимизации. По различным моделям сети был выполнен сравнительный анализ двух конкурирующих методов обработки. Результаты экспериментальных исследований и их анализ показали преимущество метода псевдонормальной оптимизации перед методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: плохо обусловленная система, устойчивость алгоритма, метод наименьших квадратов, метод псевдонормальной оптимизации, относительная погрешность алгоритма, псевдообратная матрица, евклидова норма вектора

STUDY OF THE ALGORITHM OF PSEUDONORMAL OPTIMIZATION ON THE STABILITY OF THE SOLUTION OF THE EQUATION PROBLEM AND THE ESTIMATION OF THE ACCURACY

Amridon G. Barliani
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35, e-mail: agbarliani@mail.ru

Galina A. Nefedova
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35

Irina V. Karnetova
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo str., Novosibirsk, 630108, Russia, Senior Lecturer of the Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35

In geodesic practice, when designing and adjusting geodetic networks for various purposes on a computer, it is necessary to solve poorly conditioned systems of linear normal equations. In such systems, the determinant of the matrix of equations tends to zero, so the application of the least squares method leads to large distortions of the estimated parameters. Moreover, in such situations, for the least squares algorithm, a slight distortion of the input data leads to unacceptably large distortions of the final results of the equalization and accuracy estimation. In this regard, the application of the pseudonormal optimization method is proposed. The presented work is devoted to the study of the stability of the solution of the adjustment task and the estimation of accuracy obtained on the basis of the pseudonormal optimization method. The novelty is the obtained algorithm for estimating the relative error of the pseudonormal optimization method. A comparative analysis of two competing processing methods was performed for different network models. The results of experimental studies and their analysis have shown the advantage of the pseudonormal optimization method over the least squares method.

Keywords: ill-conditioned system, algorithm stability, least squares method, pseudonormal optimization method, relative error of the algorithm, pseudo-inverse matrix, euclidean norm of the vector

Введение

В процессе оптимального проектирования и уравнивания геодезических сетей различного назначения на ЭВМ приходится решать системы линеаризованных уравнений больших размеров, причем очень часто они могут быть плохо обусловленными [1–9]. Более того коэффициенты и другие параметры, входящие систему уравнений, вычисляются приближенно. Поэтому для решения поставленной задачи при использовании численных алгоритмов, основанных на методе наименьших квадратов (МНК), возникает проблема устойчивости решения задачи [3, 10–18]. В этих условиях задача выбора наилучшего алгоритма, устойчивого к возмущениям данных, является актуальной.

Ясно, что при решении конкретной задачи математические алгоритмы редко дают точно идентичные результаты, так как во входных данных алгоритма содержатся как ошибки измерений, так и ошибки предварительных вычислений. Кроме того, ошибки могут генерироваться внутри алгоритма из-за различных допущений и приближений. В любом случае для оценки погрешностей конечных результатов, полученных с помощью конкретного алгоритма, необходимо иметь критерий, оценивающий степень расхождения между точными и возмущенными решениями. В специальных разделах вычислительной математики для метода наименьших квадратов имеется критерий оценки устойчивости решения. Однако критерия оценки устойчивости решения метода псевдонормальной оптимизации, как в геодезической, так и математической литературе, отсутствует. В данной работе восполняется это пробел, и на основании доказанной теоремы предлагается критерий, оценивающий относительную погрешность устойчивости алгоритма метода псевдонормальной оптимизации.

Методы решения

Для анализа устойчивости алгоритмов воспользуемся свойством *обратной устойчивости.*

Пусть имеется матричная система уравнений:

$$R \cdot x = b, \tag{1}$$

где R – симметричная и квадратная матрица системы нормальных уравнений;

x – вектор-столбец неизвестных;

b – вектор-столбец свободных членов.

Отметим, что входными данными в алгоритм решения задачи являются матрица R и вектор b [15–17].

Предположим, что мы имеем систему уравнений с возмущенной матрицей коэффициентов нормальных уравнений:

$$(R + \delta R) \cdot \hat{x} = b, \tag{2}$$

где δR – матрица возмущений, например, на уровне предельной ошибки округлений,

$\hat{x} = (x + \delta x)$ – решение возмущенной системы.

Пусть для решения возмущенной системы применяется некоторый алгоритм $\mathrm{alg}(x)$. Тогда можно утверждать, что исследуемый алгоритм является *обратно устойчивым алгоритмом* для решения возмущенной системы (2), если малые изменения входной матрицы δR вызывают малые изменения решения δx. При этом векторная величина δx будет называться обратной ошибкой алгоритма. На неформальном уровне можно утверждать, что мы получаем точный ответ x для слабо возмущенной системы уравнений (2).

Сказанное означает, что для относительной погрешности алгоритма можно предложить такую оценку [9]:

$$\varepsilon_{\mathrm{alg}} = \frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \le f'(x) \cdot \frac{\|\delta R\|}{\|R\|}, \tag{3}$$

где $\|...\|$ – векторная и матричные нормы (причем любые нормы);

$f'(x)$ – так называемое число обусловленности невозмущенной системы уравнений (1), что характеризует используемый для решения задачи алгоритм. В линейной алгебре в качестве критерия обусловленности используется число обусловленности матрицы R.

Следовательно, если алгоритм alg(x) обратно устойчив к незначительным возмущениям входных данных, то величина $\|\delta x\|$ всегда мала. Поэтому, если число обусловленности для алгоритма не слишком велико, мала будет и векторная погрешность δx решения системы. Отсюда следует, что обратная устойчивость как свойство алгоритма весьма привлекательна и в дальнейшем будет использована для сравнительного анализа исследуемых алгоритмов.

При численном решении системы линейных алгебраических уравнений методом обращения матрицы нормальных уравнений в качестве абсолютного показателя обусловленности системы применяют оценку [9, 19, 20]:

$$f'(x) = \|R\| \cdot \|R^{-1}\|, \tag{4}$$

где R^{-1} – обратная матрица нормальных уравнений (1);

$\|...\|$ – некоторая норма матрицы, например, евклидова норма.

Строго говоря, выражение (4) выступает показателем числа обусловленности для задачи обращения матрицы. Следовательно, этот показатель будет характеризовать устойчивость алгоритма к возмущениям входных данных при решении системы уравнений по методу наименьших квадратов.

Тогда с учетом (4) формула (3) примет окончательный вид [9]:

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \le \|R\| \cdot \|R^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta R\|}{\|R\|}. \tag{5}$$

С целью сравнительного анализа выведем формулу для оценки относительной погрешности алгоритма псевдонормальной оптимизации. Для этого докажем теорему.

Теорема. Пусть имеется система нормальных уравнений $R \cdot x = b$. Тогда относительная ошибка псевдорешения возмущенной системы линейных уравнений:

$$(R + \delta R) \cdot (x + \delta x) = b \tag{6}$$

принимает вид:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le \|R\| \cdot \|R^{+}\| \cdot \frac{\|\delta R\|}{\|R\|}, \tag{7}$$

где R^+ – псевдообратная матрица, удовлетворяющая основным свойствам: $RR^+R = R$; $R^+RR^+ = R^+$; $(RR^+)^T = RR^+$; $(R^+R)^T = R^+R$.

Доказательство. В возмущенной системе (6) раскроем скобки и получим:

$$R \cdot x + R \cdot \delta x + \delta R \cdot x + \delta R \cdot \delta x) = b. \tag{8}$$

Учитывая, что $R \cdot x = b$, то можно записать:

$$R \cdot \delta x = -\delta R \cdot (x + \delta x). \tag{9}$$

Тогда на основании псевдорешения получим:

$$-\delta x = R^+ \cdot \delta R \cdot (x + \delta x). \tag{10}$$

Возьмем здесь нормы и будем иметь:

$$\|\delta x\| = \left\|R^+ \cdot \delta R \cdot (x + \delta x)\right\|. \tag{11}$$

Далее, на основании первой части леммы 1.7 [9], а также неравенства треугольника для векторных норм получим:

$$\|\delta x\| \le \left\|R^+\right\| \cdot \|\delta R\| \cdot \|(x + \delta x)\|. \tag{12}$$

На первом этапе умножим и разделим правую часть на матричную норму $\|R\|$, затем разделим неравенство на векторную норму $\|(x + \delta x)\|$, и мы придем к доказательству теоремы.

Заметим, что в силу теоремы об эквивалентности норм [9], доказанная теорема и оценки относительных погрешностей алгоритмов (5) и (7) справедливы для любых норм.

Выражение (7) запишем в общепринятой форме:

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \le \|R\| \cdot \left\|R^+\right\| \cdot \frac{\|\delta R\|}{\|R\|}. \tag{13}$$

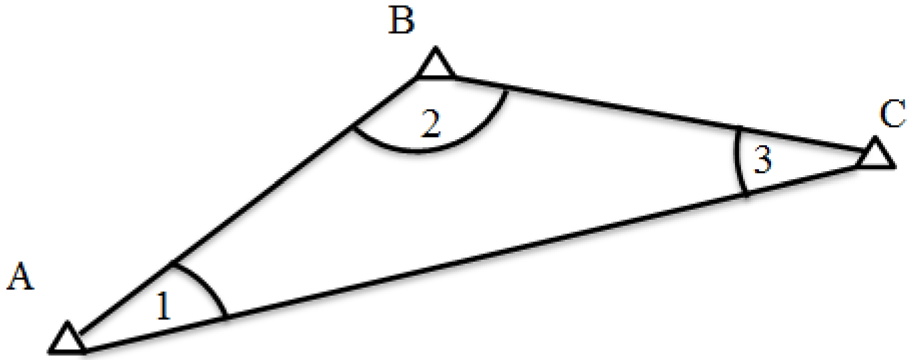
Следовательно, в качестве абсолютного показателя обусловленности для задачи псевдообращения матрицы необходимо принимать оценку:

$$f''(x) = \|R\| \cdot \left\|R^+\right\|, \tag{14}$$

и она же будет индикатором устойчивости алгоритма к возмущениям входных данных при решении системы уравнении по алгоритму метода псевдонормальной оптимизации.

Результаты экспериментальных расчетов

Теперь перейдем к конкретной задаче сравнительного анализа двух методов. В качестве примера возьмем сеть – треугольник триангуляции (рисунок).



Треугольник триангуляции

Смоделированные горизонтальные углы приведены в табл.1.

Таблица 1

Смоделированные значения измеренных углов

№ углов	Измеренные углы
1	9º 00′ 15,33″
2	158º 36′ 45,20″
3	12º 22′ 58,41″

Для сравнительного анализа необходимо провести экспериментальные исследования. С этой целью предлагается три модели представленной сети:

1. 0-свободная, когда определяемыми являются координаты пункта *C*. В этих условиях матрица нормальных уравнений и вектор свободных членов равны соответственно:

$$R = \begin{pmatrix} 0.00191 & -0.00268 \\ -0.00268 & 0.00394 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 0.048925 \\ -0.066448 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

2. S- свободная, когда измеренным является длина стороны *AB*, дирекционный угол *AB* фиксирован. Определяемыми являются координаты пунктов *B* и *C*.

Для этой сети матрица нормальных уравнений и вектор свободных членов равны соответственно:

$$R = \begin{pmatrix} 0.00444 & -0.00619 & -0.00250 & 0.00345 \\ -0.00619 & 0.01372 & 0.00501 & -0.00734 \\ -0.00250 & 0.00501 & 0.00191 & -0.00268 \\ 0.00345 & -0.00734 & -0.00268 & 0.00394 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0.02986 \\ 0.08861 \\ 0.02449 \\ -0.04084 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

3. α- свободная, когда измеряется дирекционный угол *AB*, а расстояние *AB* фиксировано. Определяемыми являются координаты пунктов *B* и *C*. Для данной модели матрица нормальных уравнений и вектор свободных членов равны соответственно:

$$R = \begin{pmatrix} 0.00337 & -0.00689 & -0.00250 & 0.00345 \\ -0.00689 & 0.01560 & 0.00501 & -0.00734 \\ -0.00250 & 0.00501 & 0.00191 & -0.00268 \\ 0.00345 & -0.00734 & -0.00268 & 0.00394 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0.02630 \\ 0.10447 \\ 0.02449 \\ -0.04084 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Поскольку в треугольнике острые углы, то для каждой представленной модели система нормальных уравнений (1) плохо обусловлена.

Для дальнейшего анализа в матрицы нормальных уравнений (15), (16) и (17) введем возмущения $\delta = 0{,}00005$, т.е. сопоставимые с предельной ошибкой округлений.

При этом для каждой модели предлагается по три варианта со следующими возмущениями:

а) значение δ прибавляется ко всем элементам матрицы *R*;

б) значение δ прибавляется только к диагональным элементам матрицы *R*.

в) значение δ прибавляется только к не диагональным элементам матрицы *R*.

Перейдем к главной части эксперимента – к оценкам погрешностей двух исследуемых алгоритмов. Для этого для всех моделей и вариантов по предлагаемым формулам (5) и (9) вычислим относительные погрешности алгоритмов. Результаты этих операции сведены в табл. 2.

Таблица 2

Относительные погрешности моделей и их вариантов

Вариант	0-свобдная		*S*-свободная		*α*- свободная	
	Относительная ошибка алгоритма		Относительная ошибка алгоритма		Относительная ошибка алгоритма	
	МПНО	МНК	МПНО	МНК	МПНО	МНК
а)	0,01727	1,68836	0,14650	41,98488	0,00833	47,23027
б)	0,01221	1,19385	0,07325	20,99244	0,00416	23,61513
в)	0,01221	1,19385	0.07325	20,99244	0,00416	23,61513

Заключение

На основании анализа экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

– в 0-свободных сетях относительная погрешность предлагаемого метода псевдонормальной оптимизации почти в 100 раз меньше погрешности метода наименьших квадратов;

– в 0-свободных сетях относительная погрешность предлагаемого метода псевдонормальной оптимизации почти в 300 раз меньше погрешности метода наименьших квадратов;

– в α- свободных сетях относительная погрешность предлагаемого метода псевдонормальной оптимизации почти в 350 раз меньше погрешности метода наименьших квадратов.

Необходимо отметить, что алгоритм МПНО можно рекомендовать для проектирования и уравнивания любых геодезических построений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барлиани, А.Г. Методы обработки и анализа пространственных и временных данных: монография /А. Г. Барлиани. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 177 с.
2. Барлиани А. Г., Барлиани И. Я. Оценка неравноточно измеренных пространственных данных, полученных методом псевдонормальной оптимизации, и их свойства. Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 4. – С. 27–39.
3. Асташков Г. Г., Барлиани А. Г., Колмогоров В. Г. Коррелатная версия уравнивания и оценки точности геодезических сетей с равноточно измеренными величинами методом псевдооптимизации. Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 4 (36). – С. 52–65.
4. Барлиани А. Г. Теория математической обработки геодезических измерений: учеб. пособие /А. Г. Барлиани. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 178 с.
5. Барлиани А. Г. Свойства оценок равноточно измеренных величин, полученных методом псевдонормальной оптимизации коррелатным способом. Вестник СГУГиТ. – 2017. – Том 22, №1 – С. 50–57.
6. Барлиани А. Г., Барлиани И. Я. Процедура оценивания параметров линейной эконометрической модели методом псевдонормальной оптимизации. Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 1(25). – С. 105–113.
7. Барлиани А. Г., Барлиани И. Я. Процедура оценивания параметров моделей экономических систем. Вестник СГУГиТ. – Вып. 1 (29). – С. 140–148.
8. Барлиани А. Г. Коррелатная версия уравнивания и оценки точности геодезических сетей по методу псевдонормального решения уравнений. ГЕО-Сибирь-2010, т. 1. Ч. 1. – С. 202–206.
9. Демель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и практика. Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
10. Карпик А. П., Каленицкий А. И., Соловицкий А. Н. Новый этап развития геодезии - переход к изучению деформаций блоков земной коры в районах освоения угольных месторождений // СГГА. Новосибирск, 2013. – №3(23). – С. 3–9
11. Карпик А. П. Разработка критериев оценки качества кадастровых данных// Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 133–136.
12. Карпик А. П. Разработка методики качественной и количественной оценки кадастровой информации // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 137–142.

13. Коугия В. А. Избранные труды. Исследования по теории математической обработкирезультатов измерений: монография. СПб. : ПГУПС, 2012. – 447 с.
14. Маркузе Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
15. Матвеев С. И. Уравнивание повторных измерений с учетом подвижности пунктов геодезической сети. Геодезия и картография, 1986, № 3. – С. 20–24.
16. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей [Текст] : учеб. пособие для вузов / М.М. Машимов. – М.: Недра, 1979. – 367 с.
17. Мицкевич, В. И. Математические методы и модели на ЭВМ : учеб.-метод. комплекс / В. И. Мицкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2007. – 184 с.
18. Яковлев Н. В. Высшая геодезия : Учебник для вузов / Н. В. Яковлев. – М. : Недра, 1989. – 445 с.
19. Schmitt G. Optimization of Geodetic Networks // Reviews of Geophysics and Space Physics. – 1983. – Vol. 20. – P. 877–884.
20. Schmitt G. Spectral analysis and optimization of two dimensional networks // Geomatics Research Australasia. – 1997. – Vol. 67. – P. 47–66.