

ОБЪЁМНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ 3D АСИММЕТРИЧНОГО КРАЯ

Юрий Васильевич Чугуй

Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН, 630058, Россия, г. Новосибирск, ул. Русская, 41, доктор технических наук, профессор, научный руководитель института, тел. (383)306-61-93, e-mail: chugui@tdisie.nsc.ru; Новосибирский государственный университет, 630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, профессор; Новосибирский государственный технический университет, 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, профессор

Применительно к размерному контролю 3D-объектов исследованы в аналитическом виде особенности формирования в дифракционно-ограниченной проекционной системе изображения объёмного асимметричного абсолютно поглощающего края – основного фрагмента толстых пластин постоянной толщины. Изучены структуры и профили интенсивностей в изображениях передней и задней граней соответственно при малых и больших апертурах оптической системы 3D-объекта для различных соотношений скоса объекта c , размера зоны Френеля $\delta \sim \sqrt{\lambda d}$ (λ – длина волны света, d – толщина объекта) и угловой апертуры оптической системы $2\theta_0$. Показано, что в случае, когда скос $c \ll \delta$ имеет место смещение профиля интенсивности изображения 3D-края, пропорциональное зоне Френеля и величине скоса. Получены и исследованы формулы для профиля изображений задней грани в случае сильных объёмных эффектов, когда глубина фокусировки системы много меньше толщины объекта. Полученные результаты находятся в согласии с результатами компьютерного моделирования.

Ключевые слова: дифракция Френеля и Фраунгофера, Фурье-оптика, пространственная фильтрация, изображения и спектры 3D-объектов, объёмный край, 3D размерный контроль.

VOLUMETRIC EFFECTS FOR IMAGE FORMATION OF 3D ASYMMETRIC EDGE

Yuri V. Chugui

Technological Design Institute of Scientific Instrument Engineering SB RAS, 41, Russkaya St., Novosibirsk, 630058, Russia, D. Sc., phone: (383)306-61-93, e-mail: chugui@tdisie.nsc.ru; Novosibirsk State University, 2, Pirogova St., Novosibirsk, 630090, Russia, professor; Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russia, professor

The peculiarities for formation of the image of volumetric asymmetric absolutely absorbing edge (the main fragment of constant thickness thick plates) in a diffraction-limited projection system are investigated in analytical form applied to 3D-objects dimensional inspection. Structures and profiles of image intensities for front and back object sides are studied respectively at small and big apertures of the 3D-object optical system for various ratios of object bevel c , the Fresnel zone size $\delta \sim \sqrt{\lambda d}$ (λ – the light wavelength, d – object thickness) and an angular aperture of the optical system $2\theta_0$. It is shown that in case when the bevel $c \ll \delta$, the shift of intensity profile of the 3D-edge image, proportional to Fresnel's zone and bevel size, takes place. Formulas for the image profile of the back side are obtained and investigated in case of strong volumetric effects, when the focus-row depth of the system is much less than the object thickness. The obtained results are in good agreement with results of computer simulations.

Key words: Fresnel and Fraunhofer diffraction, Fourier-optics, spatial filtering, images and spectra of 3D-objects, volumetric edge, 3D dimensional inspection.

Введение

Разработка когерентно-оптических систем для бесконтактного контроля трёхмерных (3D) объектов с чёткой теневой проекции в виде толстых пластин постоянной толщины требует создания доступной для практики теории формирования пространственных спектров и изображений в таких системах. Теория должна адекватно описывать дифракционные явления и позволять путём обработки измерительной информации по определённым алгоритмам получать с высокой точностью геометрические характеристики 3D-объектов. Поскольку существующая теория Кирхгофа-Френеля, справедливая для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1], может приводить к значительным погрешностям при применении её к 3D-объектам, а строгие [1, 2] и приближённые [3, 4] подходы для расчёта дифракционных явлений на таких объектах чрезвычайно сложны для инженерных применений, нами в [5] предложена конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах – сравнительно простая (в математическом отношении), физически наглядная и в то же время достаточно точная. Она основана на модели эквивалентных диафрагм, согласно которой в случае абсолютно поглощающих объектов максимальный вклад в поле в дальней зоне вносят границы передней и задней граней 3D-объекта, при этом влияние внутренней плоской поверхности объекта предполагается пренебрежимо малым. Теория позволяет при расчётах полей применять приближение Кирхгофа-Френеля и хорошо согласуется с экспериментальными данными. В работе [6] нами изучены дифракционные явления на объёмном крае толстой пластины симметричного типа, у которой внутренняя плоская поверхность перпендикулярна внешним граням, расположенным перпендикулярно оптической оси. Путём численных расчётов в [7] исследованы дифракционные явления в более общем случае: на толстых пластинах асимметричного типа (со скосом). Внутренняя плоская грань у таких объектов не перпендикулярна к их внешним граням.

В настоящей работе в аналитическом виде представлены расчёты полей в изображениях передней и задней гранях указанных объектов. При расчётах использована предложенная нами в [5] аппроксимация френелевской функции (комплексного интеграла Френеля) в классе элементарных функций, которая описывает дифракционные явления на полуплоскости. Эта аппроксимация была успешно применена при анализе особенностей формирования изображений плоских объектов в пространственно-неинвариантной оптической системе [8], при исследовании в аналитическом виде её импульсного отклика [9].

Формирование и анализ изображений передней грани 3D-края

Изучим сначала особенности формирования изображений передней грани 3D абсолютно поглощающего асимметричного края. Такой объект является типичным элементом толстых пластин (рис. 1). Исследованию подлежали изображения таких тел с положительными (рис. 1, *а*), которые характеризуют степень асимметрии 3D-объекта, и отрицательными (рис. 1, *б*) скосами *с*. Модель такого

объекта с абсолютно поглощающей внутренней поверхностью можно представить в виде двух полуплоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. 1, в, г). Она может быть охарактеризована следующими двумя граничными функциями:

$$f(x) = Y(x), \quad g(x_1) = Y(x_1 - c) \quad (1)$$

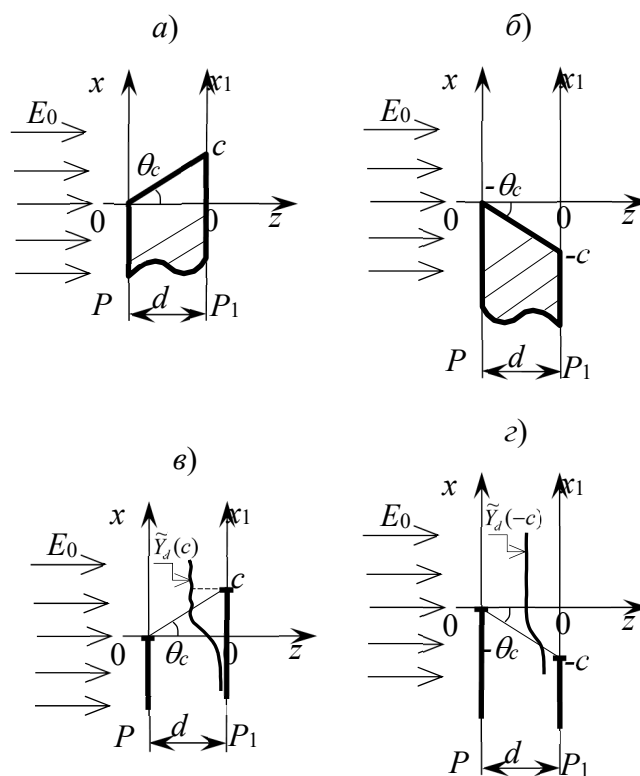


Рис. 1. 3D абсолютно поглощающий край с положительным ($c > 0$) и отрицательным ($c < 0$) скосами: соответственно сечения объектов (а, б) и модели в виде эквивалентных диафрагм (в, г)

На рис. 2 представлена схема стандартной когерентно-оптической системы 4F для формирования изображений 3D-объектов на базе двух Фурье-звеньев [10]. Исходный объект освещается плоской монохроматической волной света с длиной волны λ и амплитудой света E_0 . Он устанавливается так, чтобы его передняя грань совпадала с передней фокальной плоскостью P_1 объектива O_1 . Этим объективом в результате прямого преобразования Фурье в задней фокальной плоскости в виде распределения амплитуд и фаз света формируется дифракционная картина Фраунгофера $F(\theta)$ (θ – угол дифракции), которая соответствует полю, наблюдаемому в дальней зоне. Эту картину далее для краткости будем называть спектром 3D-объекта. Полученный спектр $F(\theta)$ фильтруется апертурной диафрагмой-фильтром с угловыми размерами $2\theta_0$. Прошедшее через фильтр

световое распределение далее объективом O_2 подвергается обратному преобразованию Фурье, в результате которого в задней фокальной плоскости P_3 объектива O_2 формируется отфильтрованное изображение передней грани 3D-края толстой пластины, а в плоскости P_4 – изображение её задней грани. Далее в этом разделе будем полагать, что апертура системы $2\theta_0$ много меньше критического угла дифракции $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$, при котором наиболее полно проявляются объёмные эффекты. Иными словами, в этом случае глубина фокусировки системы $\Delta d = \lambda/\theta^2$ много больше толщины объекта: $\Delta d = \lambda/\theta^2 \gg d$.

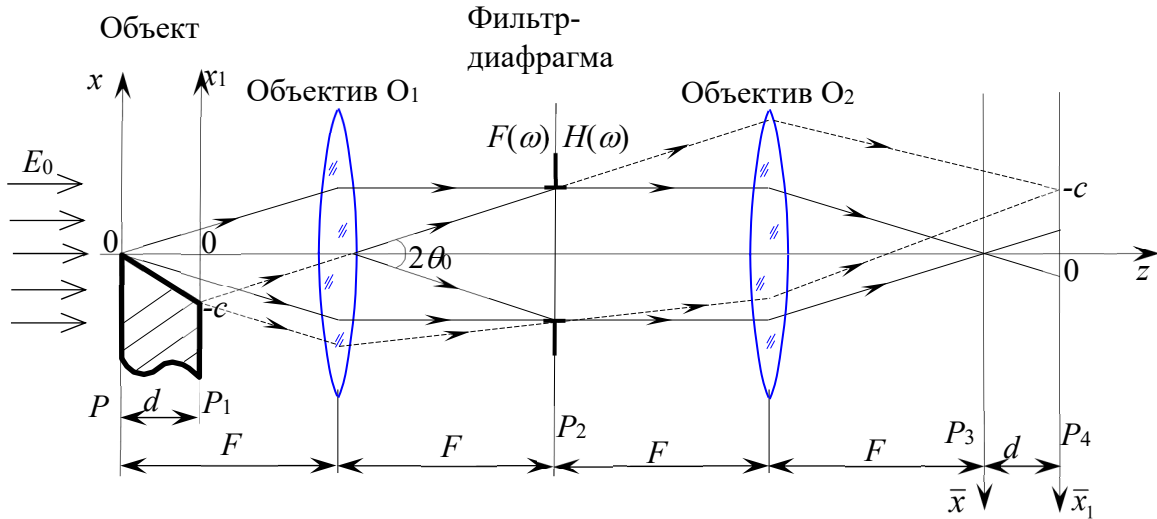


Рис. 2. Схема когерентно-оптической проекционной системы 4F для формирования изображения объектов

При дальнейших расчётах воспользуемся полученной в [2] формулой для спектра $F(\theta)$ (нормированного на E_0) 3D асимметричного абсолютно поглощающего края:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1} \left[\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2} \right], \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $k = 2\pi/\lambda$, а $\tilde{Y}_d(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi) e^{j\frac{k}{2d}(x-\xi)^2} d\xi$

и $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\theta_{кр}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\varphi) e^{jk(\theta-\varphi)^2 d/2} d\varphi$ – интегралы Френеля в комплексном виде (далее

для краткости – френелевские функции) соответственно в координатном и угловом представлениях [10–12]. Проанализируем спектр (2). Первый его член описывает проходящую (недифрагированную) волну света, второй – первичную дифракцию на передней грани с последующим виньетированием дифрагированной волны задней гранью, а третий член соответствует вторичной дифракции света на задней грани.

Исследуем далее особенности формирования изображений двух типов 3D-объектов, у которых скос c мал по сравнению с размером зоны Френеля $\sqrt{\lambda d}$ ($c \ll \sqrt{\lambda d}$) и у которых он заметно превышает эту величину ($c \gg \sqrt{\lambda d}$). Отметим, что эти условия можно представить в следующем виде: $\theta_c / \theta_{кр} \ll 1$ и $\theta_c / \theta_{кр} \gg 1$.

Случай малых скосов. Изучим сначала первый случай, когда $c \ll \sqrt{\lambda d}$ (рис. 3, а), при условии, что угловая апертура $2\theta_0$ системы много меньше критического угла дифракции: $\theta_0 \ll \theta_{кр}$ ($N = \theta_{кр} / \theta_0 \gg 1$). В этом случае объёмные эффекты, как известно, выражены слабо [6]. При указанных выше условиях разность углов $\theta - \theta_c \ll \theta_{кр}$, что позволяет френелевскую функцию $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$ линеаризовать следующим образом [6] (рис. 3, а):

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) = 0,5 + e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c) / \theta_{кр}$$

Аналогичное разложение выполним для функции $\tilde{Y}_d(x)$ при $x = c$:

$$\tilde{Y}_d(c) = 0,5 + e^{-j\pi/4}c / \sqrt{\lambda d} = 0,5 + e^{-j\pi/4}\theta_c / \theta_{кр}$$

После подстановки разложений в выражение (2) с учётом, что $c \ll \lambda / \theta_0$, для спектра $F(\theta)$ в линейном приближении можно получить следующее выражение:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1} - e^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d} / (2\pi) - 0,5c \quad (3)$$

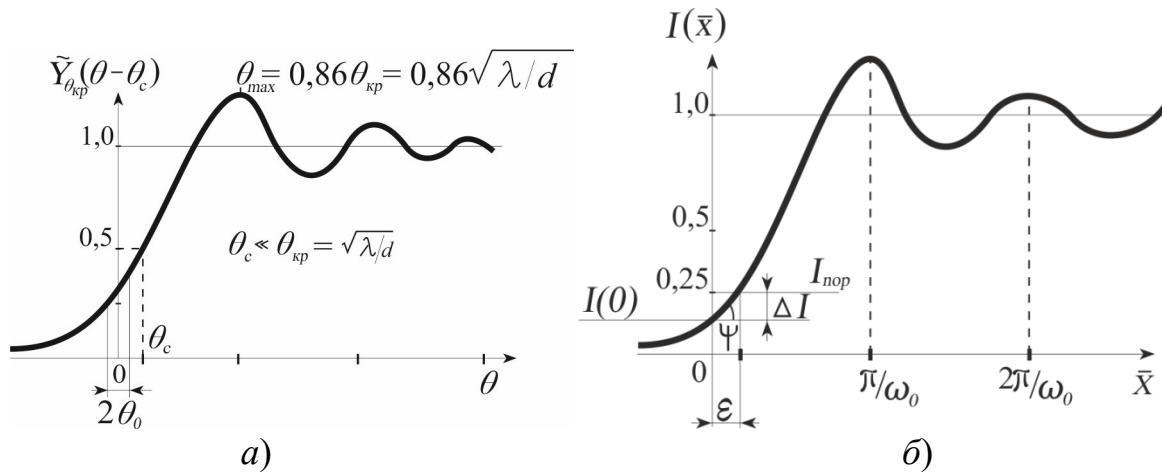


Рис. 3. Формирование изображения передней грани 3D-края с малым скосом $c \ll \sqrt{\lambda d}$:

смещённая френелевская функция $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$ на угол скоса $\theta_c = c / d \ll \theta_{кр}$ (а)

и профиль интенсивности изображения 3D-края при $c \ll \sqrt{\lambda d}$ (б)

Используя (3), нетрудно получить распределение амплитуды поля $f_{\omega_0}(\bar{x})$ в изображении передней грани после фильтрации спектра апертурной диафрагмой-фильтром (рис. 2), выступающей в качестве низкочастотного фильтра пространственных частот с передаточной функцией $H(\omega) = \text{Rect}(\omega / (2\omega_0))$, где $\omega = k\theta$ – пространственная частота, а $2\omega_0 = 2k\theta_0$ – ширина полосы частот, пропускаемых фильтром:

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega) \cdot e^{j\omega\bar{x}} d\omega = \Phi(\bar{x}) - \left[\frac{e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda d}}{2\pi} + 0,5c \right] \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}}, \quad (4)$$

где $F(\omega)$ – спектр объекта в зависимости от пространственной частоты ω , функция $\Phi(\bar{x}) = Y(\bar{x}) \otimes \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}}$ описывает распределение амплитуды поля в дифракционно-ограниченном изображении полуплоскости. Соответственно распределение интенсивности света $I(\bar{x})$ (нормированное на $I_0 = E_0^2$), в плоскости P_3 системы согласно (4) изменяется по закону:

$$I(\bar{x}) = |f_{\omega_0}(\bar{x})|^2 = \Phi^2(\bar{x}) - \frac{\sqrt{\lambda d}}{\sqrt{2\pi}} \Phi(\bar{x}) \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}} - c\Phi(\bar{x}) \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}} \quad (5)$$

Определим теперь смещение профиля интенсивности $I(\bar{x})$ в изображении края (рис. 3, б), воспользовавшись тем, что значение (нормированное) интенсивности в точке $\bar{x} = 0$, соответствующей геометрической границе полуплоскости ($d = 0$), равно $I_{d=0}(\bar{x} = 0) = 0,25$. Именно эта величина ($I_{\text{пор}} = 0,25$) положена в основу порогового алгоритма нахождения геометрического положения границы объекта. Из выражения (5) нетрудно получить значение интенсивности $I(0)$ для толстого края ($d \neq 0$):

$$I(0) \approx 0,25 - \frac{\sqrt{\lambda d} \omega_0}{2\pi^2 \sqrt{2}} - \frac{c \omega_0}{2\pi} \quad (6)$$

Для того чтобы найти смещение ε профиля изображения 3D-края, учтём, что угол наклона кривой ψ в точке $x = 0$ связан с ω_0 следующим выражением: $\text{tg } \psi = \omega_0 / \pi$ [6]. Так как $\varepsilon = \Delta l / \text{tg } \psi$ (рис. 3, б), где $\Delta l = I(0) - I_{d=0}(0)$, то для приведённого к размеру зоны Френеля $\sqrt{\lambda d}$ смещения ε получаем следующую формулу:

$$\hat{\varepsilon} = -0,11 - 0,5c / \sqrt{\lambda d} = -0,11 - 0,5\hat{c}, \quad (7)$$

существенно, что при нахождении смещения края указанным пороговым алгоритмом возникает систематическая погрешность, равная ε . Она содержит посто-

янную составляющую $\varepsilon_0 = -0,11\sqrt{\lambda d}$, приводящую к смещению границы 3D-объекта в освещённую область (в конечном счете, к уменьшению размера объекта), а также переменную ε_c , прямо пропорциональную скосу c . Заметим, что с учётом указанного выше условия скос должен быть заметно меньше зоны Френеля, например, $c \sim 0,3\sqrt{\lambda d}$. Видно, что величина ε зависит от знака скоса c . В случае отрицательных значений скоса погрешность ε может быть равной нулю, что достигается при $c_{\text{омт}} = -0,22\sqrt{\lambda d}$. Если, например, толщина объекта $d = 1$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм ($\sqrt{\lambda d} = 22,4$ мкм), то постоянное смещение края $\varepsilon_0 = -2,5$ мкм, а значение скоса $c_{\text{омт}}$ составляет $-5,0$ мкм. При этом отношение $\theta_c / \theta_{\text{кр}} = c / \sqrt{\lambda d} \sim 0,22$, что согласуется с условием $c \ll \sqrt{\lambda d}$. Величина θ_0 должна быть выбрана заметно меньше $\theta_{\text{кр}}$.

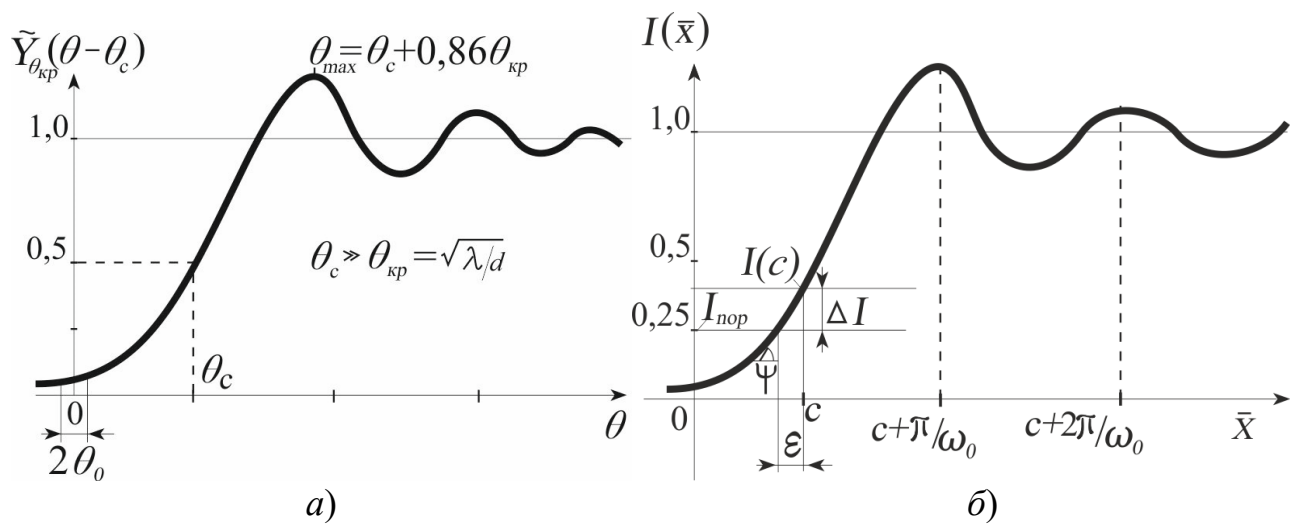


Рис. 4. Формирование изображения передней грани 3D-края с большим положительным скосом $c \gg \sqrt{\lambda d}$: смещённая френелевская функция $\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c)$ на угол скоса $\theta_c \gg \theta_{\text{кр}} \gg \theta_0$ (а) и профиль интенсивности изображения 3D-края при $c \gg \sqrt{\lambda d}$ (б)

Случай больших положительных скосов. Изучим далее структуру поля $F(\theta)$ в случае, когда скос c – положителен, а его величина значительно больше размера зоны Френеля (рис. 4, а), т.е. при $c \gg \sqrt{\lambda d}$ ($\theta_c \gg \theta_{\text{кр}}$). Для этих целей используем аппроксимацию френелевской функции $\tilde{Y}_d(x)$, предложенную нами в [5]:

$$\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) \approx Y(\theta - \theta_c) - \frac{0,5e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\beta e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c)/\theta_{\text{кр}} + \text{sgn}(\theta - \theta_c)}, \quad (8, a)$$

где $\text{sgn}(t)$ – знаковая функция [10], а параметр $\beta = 2$ при $x \ll \sqrt{\lambda d}$ и $\beta \rightarrow \pi$ при $x \gg \sqrt{\lambda d}$. Полагая по-прежнему, что $N \gg 1$, выражение для $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$, с учётом что $\theta_0 \ll \theta_c$ (рис. 4, б), можно заметно упростить:

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) = -\frac{e^{j\pi/4} e^{-jk\theta} e^{jk\theta_c^2/2d}}{2\pi(\theta - \theta_c)/\theta_{кр}} \approx \frac{e^{j\pi/4} e^{-jk\theta} e^{jk\theta_c^2/2d}}{2\pi\theta_c^2} \theta_{кр} \left(1 + \frac{\theta}{\theta_c}\right)$$

Если далее функцию $\tilde{Y}_d(c)$ аппроксимировать как

$$\tilde{Y}_d(c) = 1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi c} e^{j\pi/4} e^{jkc^2/2d}, \quad (8, б)$$

то с учётом, что $\theta_0 \ll \theta_c$, а $\theta_{кр}/\theta_0 \gg 1$ для спектра $F(\theta)$ можно получить следующее выражение:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} \frac{e^{j\pi/4} e^{-jk\theta} e^{jk\theta_c^2/2d}}{2\pi\theta_c/\theta_{кр}} \left(1 + \frac{\theta}{\theta_c}\right) + \frac{1}{jk\theta} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi c} e^{j\pi/4} e^{jkc^2/2d}\right] e^{-jk\theta} = \pi\delta(k\theta) + \frac{e^{-jk\theta}}{jk\theta} + \frac{\sqrt{\lambda d}}{4\pi^2 \hat{c}^2} e^{-j\pi/4} e^{jkc^2/2d} e^{-jk\theta} \quad (9)$$

В результате фильтрации спектра низкочастотным фильтром с полушириной полосы пространственных частот $\omega_0 \ll \omega_{кр} = k\theta_{кр} \ll \omega_c = k\theta_c$ ($\theta_0 \ll \theta_{кр} \ll \theta_c$) для амплитудного распределения поля в плоскости P_3 изображения передней грани (рис. 2) можно получить следующее выражение:

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \Phi(\bar{x} - c) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{4\pi^3 \hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} - c)]}{(\bar{x} - c)} e^{-j\pi/4} e^{jkc^2/2d} \quad (10)$$

Выражение для интенсивности света в изображении передней грани 3D-края $I(\bar{x}) = |f_{\omega_0}(\bar{x})|^2$ принимает следующий вид:

$$I(\bar{x}) = |f_{\omega_0}(\bar{x})|^2 \approx \Phi^2(\bar{x} - c) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi^3 \hat{c}^2} \Phi(\bar{x} - c) \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} - c)]}{\bar{x} - c} \cdot \cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4) \quad (11)$$

Здесь первый член описывает профиль интенсивности в изображении задней полуплоскости, смещённой на величину скоса c . А это означает, что в исследуемом случае положительного скоса действующим краем оказывается граница задней грани. При этом наблюдается небольшое смещение профиля её изображения (второй член), которое однако заметно уменьшается при увеличении скоса \hat{c} .

Чтобы определить ожидаемое смещение профиля изображения ε задней грани, найдём значение интенсивности $I(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = c$, соответствующей геометрическому положению границы задней грани в её изображении. Учитывая, что значение функции $\Phi(c) = 0,5$ для интенсивности $I(\bar{x})$ нетрудно получить следующее выражение:

$$I(\bar{x} = c) = 0,25 + \frac{\sqrt{\lambda d} \omega_0}{4\pi^3 \hat{c}^2} \cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4) \quad (12)$$

Определим теперь погрешность ε определения границы $\bar{x} = c$ при использовании порогового алгоритма с величиной порога $I_{\text{пор}} = 0,25$ (рис. 4, б). В этом случае $\Delta I = I(c) - 0,25$. В этом случае для приведённой погрешности $\hat{\varepsilon} = \varepsilon / \sqrt{\lambda d}$ можно получить следующую формулу:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{I}(c) - \hat{I}_{d=0}(0)}{\text{tg} \psi} = \frac{\hat{I}(c) - 0,25}{\omega_0 / \pi} = \frac{\cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4)}{4\pi^2 \hat{c}^2} \leq \frac{1}{4\pi^2 \hat{c}^2} \quad (13)$$

Видно, что изменение погрешности в зависимости от положения края носит колебательный характер, причём, как и следовало ожидать, эти колебания быстро затухают обратно пропорционально \hat{c}^2 .

Оценим величину ε при следующих параметрах объекта и световой волны: $d = 1$ мм, $\hat{c} = c / \sqrt{\lambda d} = 3$, $\lambda = 0,5$ мкм ($\delta = \sqrt{\lambda d} = 22,4$ мкм). Подставляя приведённые значения в (15), получим, что погрешность определения положения заднего края пренебрежимо мала: $\varepsilon = 0,06$ мкм.

Случай больших отрицательных скосов. Исследуем теперь структуру изображения 3D-края, когда скос $c \ll -\sqrt{\lambda d}$ (рис. 5). В этом случае функцию $\tilde{Y}_d(c)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tilde{Y}_d(c) = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|c|} e^{j\pi/4} e^{jkc^2/2d}$$

Так как ступенчатая функция $Y(\theta + |\theta_c|)$ при $\theta > -\theta_c$ будет равна 1, то с учётом, что $|\theta| \leq |\theta_c|$, выражение для спектра $F(\theta)$ принимает следующий вид:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} + \frac{1}{jk\theta} \left[-\frac{e^{j\pi/4} e^{jk\theta c} e^{jkc^2/2d}}{2\pi|\theta_c|/\theta_{\text{кр}}} \left(1 - \frac{\theta}{|\theta_c|} \right) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|c|} e^{j\pi/4} e^{jkc^2/2d} e^{jk\theta c} \right] =$$

$$= \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} + \frac{e^{-j\pi/4} e^{jkc^2/2d} e^{jk\theta c} \sqrt{\lambda d}}{4\pi^2 \hat{c}^2} \quad (14)$$

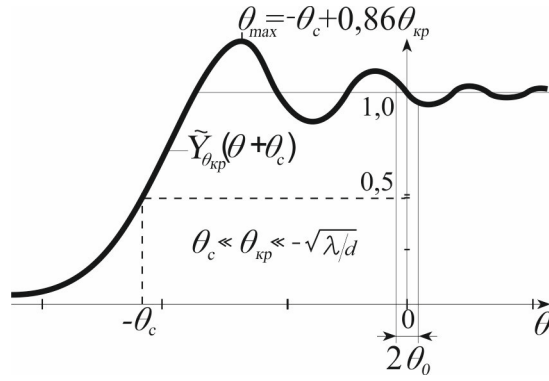


Рис. 5. Формирование изображения передней грани 3D-края с большим отрицательным скосом ($c < 0$), причём $|c| \gg \sqrt{\lambda d}$.

Френелевская функция $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta + \theta_c)$ смещена в область отрицательных углов θ на величину θ_c

После низкочастотной фильтрации полученного спектра для амплитудного распределения поля в изображении 3D-объекта в плоскости P_3 имеем:

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) + \frac{e^{-j\pi/4} e^{jk^2/2d} \sqrt{\lambda d} \sin[\omega_0(\bar{x} + c)]}{4\pi^3 \hat{c}^2 (\bar{x} + c)} \quad (15)$$

Первый член $\Phi(\bar{x})$ в полученном изображении описывает профиль амплитуды в дифракционно-ограниченном изображении передней грани с граничной функцией $Y(x)$, соответствующей полуплоскости с границей в точке $x = 0$. Влияние на это поле задней грани, сдвинутой на величину $-|c|$ в тень (относительно оптической оси), представлено вторым членом. Можно видеть, что вклад этого члена в поле $\hat{f}_{\omega_0}(\bar{x})$ при увеличении скоса c , как и в случае $c > 0$, падает обратно пропорционально \hat{c} и, кроме того, дополнительно уменьшается в соответствии с падением функции $\sin[\omega_0(\bar{x} + c)]/(\bar{x} + c)$.

Используя (15), нетрудно найти распределение интенсивности в изображении 3D-объекта при указанных выше условиях:

$$I(\bar{x}) \approx \Phi^2(\bar{x}) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi^3 \hat{c}^2} \Phi(\bar{x}) \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} + c)]}{\bar{x} + c} \quad (16)$$

Отсюда нетрудно установить, что погрешность определения границы передней грани (в точке $\bar{x} = c$) пороговым алгоритмом можно найти согласно следующему выражению:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\pi \Delta I}{\omega_0} = \pi \frac{\hat{I}(0) - 0,25}{\omega_0} = \frac{\sin(\omega_0 c)}{4\pi^2 \hat{c}^2 \omega_0 c} \quad (17)$$

Из сравнения формул (17) и (13) следует, что влияние задней грани на изображение передней грани, благодаря множителю $\sin(\omega_0 c)/(\omega_0 c) < 1$, слабее, нежели в случае положительного скоса.

Формирование и анализ изображения задней грани 3D-объекта

Исследуем теперь особенности формирования изображения задней грани 3D абсолютно поглощающего асимметричного края в дифракционно-ограниченной системе, когда объемные эффекты выражены достаточно сильно: $\theta_0 \gg \theta_{кр}$ ($N \ll 1$). Будем исходить из известного выражения для поля задней грани [6]:

$$g(x_1) = \tilde{Y}_d(x_1) \cdot Y(x_1 - c) \quad (18)$$

Рассмотрим два случая, когда скос c достаточно мал по сравнению с размером зоны Френеля ($c \ll \sqrt{\lambda d}$ или $\theta_c \ll \theta_{кр}$), и когда он значителен ($c \gg \sqrt{\lambda d}$ или $\theta_c \gg \theta_{кр}$).

При **малых скосах**, воспользовавшись линейной аппроксимацией френелевской функции $\tilde{Y}_d(x_1)$ в окрестности $x_1 = 0$, а именно $\tilde{Y}_d(x_1) = 0,5 + e^{-j\pi/4} x_1 / \sqrt{\lambda d}$ (рис. 6), поле в плоскости P_1 можно представить в следующем виде:

$$g(x_1) = [0,5 + e^{-j\pi/4} x_1 / \sqrt{\lambda d}] Y(x_1 - c)$$

Используя это выражение, для амплитуды в дифракционно-ограниченном изображении задней грани получаем:

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = g(\bar{x}_1) \otimes h_{\omega_0}(\bar{x}_1) = [\tilde{Y}(\bar{x}_1) \cdot Y(\bar{x}_1 - c)] \otimes \sin \frac{(\omega_0 \bar{x}_1)}{\pi \bar{x}_1}, \quad (19)$$

где $h_{\omega_0}(\bar{x}_1) = \sin \frac{(\omega_0 \bar{x}_1)}{\pi \bar{x}_1}$ – импульсный отклик дифракционно-ограниченной системы, а \otimes – символ операции свёртки.

Как показывают расчёты, формулы для распределения амплитуд и интенсивностей имеют следующий вид:

$$g_{\omega_0}^{(1)}(\bar{x}_1) = 0,5\Phi(\bar{x}_1 - c) + \frac{e^{-j\pi/4} \bar{x}_1}{\sqrt{\lambda d}} \Phi(\bar{x}_1 - c) - \frac{e^{j\pi/4} \cos[\omega_0(\bar{x}_1 - c)]}{\pi \sqrt{\lambda d} \omega_0} \quad (20)$$

$$I(\bar{x}_1) \approx 0,25\Phi^2(\bar{x}_1 - c) + \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{2\lambda d}} \Phi^2(\bar{x}_1 - c) - \frac{\Phi(\bar{x}_1 - c) \cos[\omega_0(\bar{x}_1 - c)]}{\pi \sqrt{2\lambda d} \omega_0} \quad (21)$$

Важно подчеркнуть, что полученные распределения справедливы при сформулированном нами ранее условии: $\theta_0 \gg \theta_{кр}$ ($N \ll 1$). Это означает, что характерный размер импульсного отклика системы $\Delta \sim \lambda / \theta_0$ много меньше размера зоны Френеля: т.е. $\Delta \ll \delta = \sqrt{\lambda d}$ (рис. 6). В этом случае глубина фокусировки системы Δz много больше толщины объекта d , т.е. $\Delta z \sim \lambda / \theta^2 \gg d$.

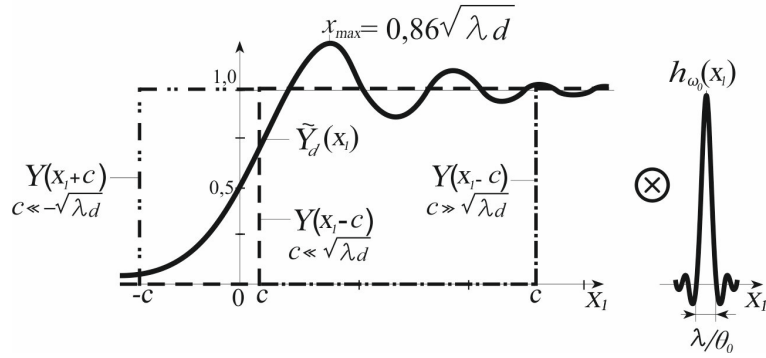


Рис. 6. К формированию изображения задней грани 3D-края при различных скосах c : исходное поле в плоскости задней грани (P_1) при малых скосах $c \ll \sqrt{\lambda d}$, при больших положительных скосах $c \gg \sqrt{\lambda d}$ и больших отрицательных скосах $c < 0$, причём $|c| \gg \sqrt{\lambda d}$, $\tilde{Y}_d(x_1)$ – френелевское изображение передней грани в плоскости P_1 (рис. 2), $Y(x_1 - c)$ и $Y(x_1 + c)$ – ступенчатые функции, смещённые на величину c и $-c$, $h_{\omega_0}(x_1)$ – импульсный отклик дифракционно-ограниченной системы

Найдём далее значение интенсивности света в точке $\bar{x}_1 = c$:

$$I(c) \approx 0,0625 + \frac{c}{4\sqrt{2\lambda d}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\lambda d}\omega_0} \quad (22)$$

Для определения смещения края и соответственно погрешности ε воспользуемся прежней процедурой:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda d}} = -0,093N + \frac{\hat{c}}{8\sqrt{2}}N + \frac{N^2}{8\sqrt{2}\pi^2} = -0,093N + 0,09\hat{c}N - 0,009N^2 \quad (23)$$

Существенно, что, так как в рассматриваемом случае $\hat{c} \ll 1$, то основной вклад в погрешность согласно (23) даёт первый член, не зависящий от скоса. Его вклад в погрешность можно заметно снизить, если выбрать порог не на уровне 0,25 (как это мы делали до этого), а на уровне 0,0625, который учитывает постоянную составляющую (равную 0,5) в распределении $\tilde{Y}_d(x)$, освещающем заднюю грань. С учётом этого первый член в (23) будет с хорошей точностью равен нулю. В этом случае при смещении края на величину c погрешность определения его положения растёт прямо пропорционально этой величине и, например, при $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d} = 0,3$ и $N = 0,3$ значение ε при $d = 10$ мм равно 0,6 мкм (при $c = 0$ погрешность ε практически отсутствует).

Исследуем далее случай 3D-края *с большим положительным скосом* ($c \gg \sqrt{\lambda d}$). Аппроксимированная френелевская функция для такой ситуации согласно (8, а) с учётом $\beta = \pi$ может быть представлена в следующем виде (рис. 6):

$$\tilde{Y}_d(x_1) \approx Y(x_1) - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi x_1} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d}$$

Соответственно выходное распределение поля $g_{\omega_0}(x)$ в дифракционно-ограниченном изображении задней грани можно найти из следующего выражения:

$$\begin{aligned} g_{\omega_0}(\bar{x}_1) &= [\tilde{Y}_d(\bar{x}_1)Y(\bar{x}_1 - c)] \otimes \frac{\sin(\omega_0 \bar{x}_1)}{\pi \bar{x}_1} = \\ &= \Phi(\bar{x}_1 - c) - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi} e^{j\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jk\xi^2/2d}}{\xi} Y(\xi - c) \sin \frac{[\omega_0(\bar{x}_1 - \xi)]}{\pi(\bar{x}_1 - \xi)} d\xi \end{aligned}$$

При вычислении этого интеграла учтём, что при $\sqrt{\lambda d} \gg \lambda / \theta_0$ ($\theta_{sp} / \theta_0 = N \ll 1$) член $e^{jk\xi^2/2d}$ слабо меняется в пределах характерного размера $\Delta = \lambda / \theta_0$ функции $\frac{\sin(\omega_0 \bar{x}_1)}{\pi \bar{x}_1}$ и его можно вынести из подынтегрального выражения. В результате для амплитудного распределения $g_{\omega_0}(\bar{x}_1)$ получаем:

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = \Phi(\bar{x}_1 - c) - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi} e^{j\pi/4} \frac{e^{jk\bar{x}_1^2/2d}}{\bar{x}_1} \Phi(\bar{x}_1 - c) \quad (24)$$

Соответственно для распределения интенсивности света в изображении задней грани (при сохранении основных членов) имеем:

$$I(\bar{x}_1) = |g_{\omega_0}(\bar{x}_1)|^2 = \Phi^2(\bar{x}_1 - c) \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{\pi \bar{x}_1} \cos(k\bar{x}_1^2/2d + \pi/4) \right]. \quad (25)$$

Значение интенсивности в точке $\bar{x}_1 = c$ равно:

$$I(\bar{x}_1 = c) = 0,25 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{4\pi c} \cos\left(k \frac{c^2}{2d} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,25 - \frac{\cos(\pi\hat{c}^2 + \pi/4)}{4\pi\hat{c}} \quad (26)$$

Систематическая приведённая погрешность определения положения границы края 3D-объекта будет равна:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda d}} = \frac{\Delta I \lambda}{2\sqrt{\lambda d} \theta_0} = \frac{(I(c) - 0,25)\lambda}{2\sqrt{\lambda d} \theta_0} = -\frac{N}{8\pi\hat{c}} \cos(\pi\hat{c}^2 + \pi/4). \quad (27)$$

И, например, при $\hat{c} = 3$ и $N = 0,3$ максимальное значение приведённой погрешности не превышает $-0,015$, что при толщине объекта $d = 10$ мм составляет $\varepsilon = -1$ мкм.

Из сравнения (27) с выражением (13) для погрешности определения положения края в изображении передней грани следует, что в рассматриваемом случае погрешность нахождения задней грани убывает медленнее (обратно пропорционально c), что объясняется сильным влиянием объёмных эффектов при углах $\theta_0 \gg \theta_{кр}$.

Для 3D-края с **большим отрицательным скосом** ($c < 0$, $c \ll -\sqrt{\lambda d}$), когда задняя грань находится в тени (рис. 6), френелевская функция $\tilde{Y}_d(x)$ затухает согласно выражению (8, б) по закону:

$$\tilde{Y}_d(x_1) = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|x_1|} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d}$$

В этом случае амплитуда распределения поля в плоскости задней грани P_1 изменяется следующим образом:

$$g(x_1) = \tilde{Y}_d(x)Y(x_1 + c) = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|x_1|} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d} Y(x_1 + c)$$

Исходя из этого, для амплитудного распределения в дифракционно-ограниченном изображении задней грани имеем:

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|x_1|} e^{j(kx_1^2/2d + \pi/4)} \Phi(\bar{x}_1 + c) \quad (28)$$

Соответственно распределение интенсивности света:

$$I(\bar{x}_1) = \frac{\lambda d}{4\pi^2 x_1^2} \Phi^2(\bar{x}_1 + c), \quad (29)$$

а значение интенсивности в точке $\bar{x}_1 = c$, соответствующей геометрическому положению границы смещённой полуплоскости в её изображении, равно:

$$I(\bar{x}_1 = c) = \frac{1}{16\pi^2 \hat{c}^2} \quad (30)$$

Видно, что интенсивность поля в изображении задней грани, находящейся в теневой области, быстро падает обратно пропорционально \hat{c}^2 и, например, при $\hat{c} = 3$ она составляет 0,07 % от интенсивности волны, освещающей объект. Таким образом, информация о задней грани, находящейся в тени на расстоянии c , равным нескольким зонам Френеля, практически исчезает. Более того, в выходной плоскости системы не наблюдается также и изображения передней грани в силу его сильной расфокусировки при большой апертуре оптической системы $\theta_0 \gg \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$, при которой глубина фокусировки системы Δd много меньше толщины объекта: т.е. $\Delta d \sim \lambda/\theta^2 \ll d$.

Сравнение полученных оценок с результатами компьютерного моделирования

В работе [7] путём компьютерных расчётов получены профили изображений 3D абсолютно поглощающего асимметричного края при различных значениях приведённого скоса $\hat{c} = c / \sqrt{\lambda d}$. На рис. 7, а приведены графики профиля интенсивности в изображении передней грани объекта в дифракционно-ограниченной проекционной системе при параметре объёмности $N = 2$. Можно видеть, что в случае, когда задняя грань находится в тени передней грани ($\hat{c} = -0,5$), профиль изображения передней грани толстого края практически не отличается от случая тонкого края ($d = 0$). При положительных скосах c имеет место смещение профиля изображения на величину, в точности равную параметру c .

На рис. 7, б, в приведены графики поведения погрешности ε определения границы 3D-края в зависимости от скоса \hat{c} . Погрешность определялась методом пороговой обработки (на уровне 25 %) профилей выходных распределений интенсивности. При этом она определялась по формуле $\hat{\varepsilon} = \hat{x}_{реал} - \hat{x}_{тен}$, где $\hat{x}_{реал}$ – вычисленное приведённое значение (к $\sqrt{\lambda d}$) координаты границы грани, а $\hat{x}_{тен}$ – приведённое значение координаты «теневого» действующего края (при «схлопывании» толстого края до нулевой толщины $d = 0$), причём $\hat{x}_{тен} = 0$ при $c < 0$ и $\hat{x}_{тен} = \hat{c}$ при $c > 0$. Вычисления выполнялись для изображений передней (рис. 7, б) и задней (рис. 7, в) граней. В первом случае значение параметра N были выбраны следующими: 0,8; 1; 3. Видно, что ошибка нахождения координаты передней грани границы 3D-края уменьшается при увеличении N . Можно показать, что она находится в интервале $-0,2 / N \leq \varepsilon \leq (2\sqrt{2}\pi)^{-1}$ [7]. Отметим, что для симметричного края ($c = 0$) абсолютная погрешность его смещения $|\varepsilon| = 0,11\sqrt{\lambda d}$, что согласуется с ранее полученными результатами. Видно, что поведение погрешности при $c > 0$ носит колебательный характер с затуханием $\sim c^{-2}$, причём для $c < 0$ (задняя грань находится в тени) погрешность ε затухает достаточно быстро. Это согласуется с полученными нами теоретическими расчётами. В случае задней грани значения N выбирались равными: 0,8 и 1,5 (рис. 7, в). При $c > 0$ колебания затухают медленнее (нежели в предыдущем случае) по закону c^{-1} , что находится в соответствии с полученными нами теоретическими результатами. Максимальная погрешность определения границы задней грани имеет место при $c = 0$.

Таким образом, можно видеть хорошее согласие полученных аналитических оценок с результатами компьютерного моделирования полей в изображениях 3D абсолютно поглощающего асимметричного края.

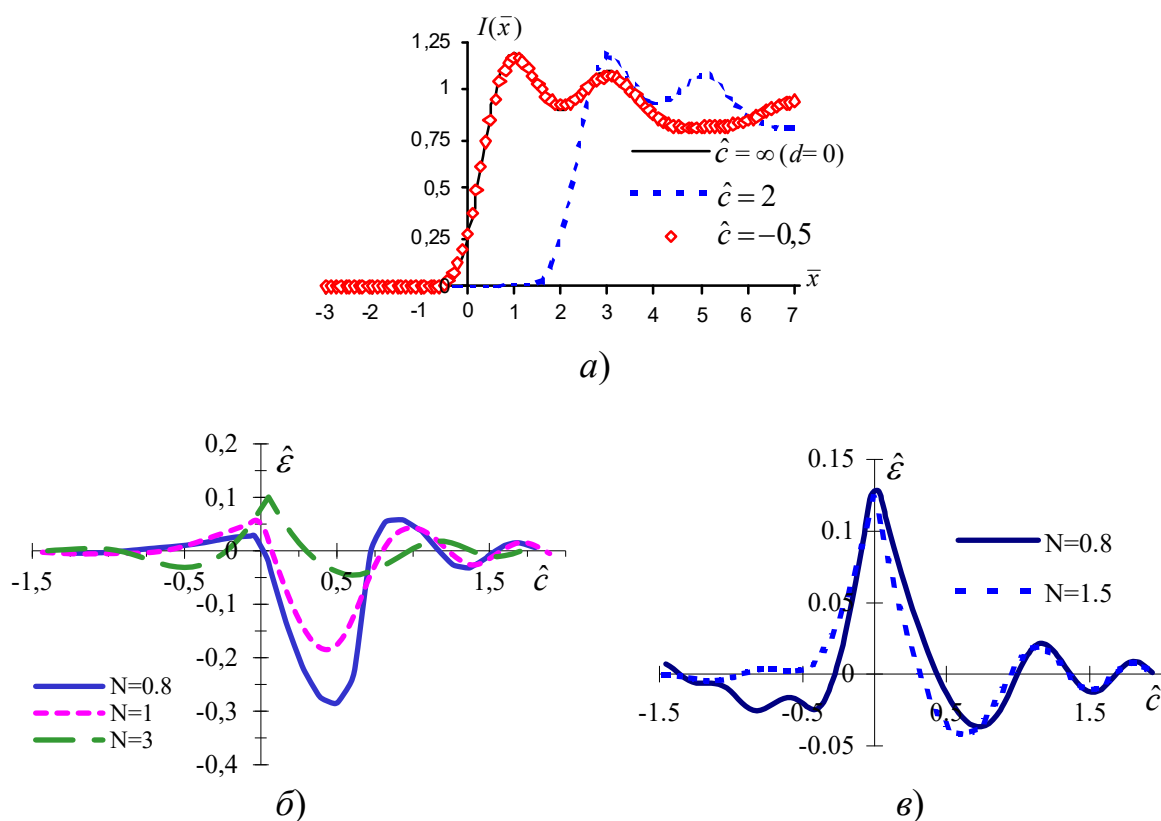


Рис. 7. Изображение передней грани 3D асимметричного края в дифракционно-ограниченной оптической системе при параметре объёмности $N = 2$ и различных значениях приведённого скоса $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$ (а). Смещение положения границы передней (б) и задней (в) граней (относительно 25 % порога) в изображении толстого абсолютно поглощающего асимметричного края в зависимости от скоса $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$ при различных значениях параметра объёмности N

Заключение

Применительно к размерному контролю 3D-объектов исследованы в аналитическом виде особенности формирования в дифракционно-ограниченной проекционной системе изображений объёмного асимметричного абсолютно поглощающего края – основного фрагмента толстых пластин постоянной толщины. Исследования выполнены на основе конструктивной теории дифракционных явлений на таких телах с использованием модели эквивалентных, согласно которой основной вклад в дифракционное поле в дальней зоне дают передняя и задняя грани объекта, а вклад поля от внутренней грани полагается пренебрежимо малым. При расчётах использована аппроксимация интеграла Френеля (комплексного вида) элементарными функциями.

Изучены структуры изображений передней и задней граней 3D-объекта соответственно при малых и больших апертурах оптической системы для различ-

ных соотношений скоса объекта c и размера зоны Френеля $\delta = \sqrt{\lambda d}$. Показано, что в случае, когда скос много меньше размера зоны Френеля, имеет место смещение профиля интенсивности изображения, пропорциональное зоне Френеля и величине скоса c . Это смещение ведёт к систематической погрешности измерения. Установлено, что в случае больших скосов структура изображения в плоскости передней грани зависит от знака c . Так, при положительном скосе, когда задняя грань находится в освещённой области, а передняя – затенена задней гранью, наблюдается изображение задней грани, причём погрешность определения границы задней грани обратно пропорциональна квадрату скоса. При отрицательном скосе, когда задняя грань находится в теневой области, поле на выходе системы соответствует изображению передней грани. При этом влияние задней грани гораздо слабее, нежели в случае положительного скоса.

Получены формулы для профиля изображений задней грани в случае сильных объёмных эффектов, когда глубина фокусировки системы много меньше толщины объекта. Показано, что погрешность определения границы объекта уменьшается обратно пропорциональна скосу c . Такое медленное её затухание объясняется сильным влиянием объёмных эффектов.

Из сравнения полученных результатов с результатами компьютерного моделирования установлено, что они находятся в хорошем согласии.

Результаты исследования могут быть использованы при разработке когерентно-оптических систем для 3D прецизионного контроля объектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М. : Мир, 1970. 720 с.
2. Хенл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М. : Мир, 1964. 428 с.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. – М. : Связь, 1978. 247 с.
4. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction // JOSA. 1962. 52, Is. 2. P. 116–130.
5. Chugui Yu. V., Krivenkov B. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. 6, N 5. P. 617–626.
6. Чугуй Ю. В. Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
7. Chugui Yu. V., Sokolov V. A. Formation and filtering in coherent light the images of 3D asymmetric edges // Proc. of 6th ISMQC IMEKO Symp. Metrology for Quality Control in Production. Vienna, Austria, 8–10 Sept. 1998. P. 117–124.
8. Чугуй Ю. В. Расчёт положения границы объекта при его проецировании в пространственно-неинвариантной когерентно-оптической системе // Автометрия. 2016. 52, № 6. – С. 50–60.
9. Чугуй Ю. В. Расчёт и анализ импульсного отклика проекционных пространственно-неинвариантных систем // Автометрия. 2018. 54, № 6. – С. 34–47.
10. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
11. Папулис А. Теория системы и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамова, И. Стишина. – М. : Наука, 1979. 832 с.

© Ю. В. Чугуй, 2020