УДК 539.3
DOI: 10.33764/2618-981X-2020-2-210-218

ЗАДАЧА О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕЛИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Анвар Исмагилович Чанышев
Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, тел. (383)335-97-50; Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, зав. кафедрой математики и естественных наук, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Ольга Евгеньевна Белоусова
Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, тел. (383)335-97-50, e-mail: o.e.belousova@mail.ru

Лариса Леонидовна Ефименко
Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественных наук, тел. (383)243-94-75, e-mail: efimenko.larisa@gmail.com

Ирина Валерьевна Гутарова
Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, ст. преподаватель кафедры математики и естественных наук, тел. (383)243-94-75, e-mail: max_ira@ngs.ru

Ирина Владимировна Фролова
Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, ст. преподаватель кафедры математики и естественных наук, тел. (383)243-94-75, e-mail: sten9@rambler.ru

Лариса Ивановна Торгашова
Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, ст. преподаватель кафедры математики и естественных наук, тел. (383)243-94-75, e-mail: aspirant_igd@mail.ru

В рамках подхода Лейбензона-Ишлинского решается задача о потере устойчивости целика горной выработки цилиндрической формы. Материал целика предполагается с первоначальной анизотропией, отвечающей слоистой структуре. Строится критерий потери устойчивости, определяется решение системы дифференциальных уравнений задачи в виде комбинаций цилиндрических и тригонометрических функций. Из равенства нулю определителя системы однородных алгебраических уравнений находится значение критической нагрузки, при которой наряду с основным продолжением процесса деформирования целика возможно другое с измененной геометрией поверхности. Исследуется влияние первоначальной анизотропии, параметров целика (высота, радиус) на значения предельной нагрузки.

Ключевые слова: устойчивость, анизотропия, критическая нагрузка, влияние анизотропии, решение задачи, осесимметричная деформация.

THE PROBLEM OF THE STABILITY LOSS OF INITIALLY ANISOTROPIC CYLINDRICAL PILLAR

Anvar I. Chanyshev
Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, D. Sc., Chief Researcher, phone: (383)335-97-50; Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Head of the Mathematics and Natural Sciences Department, phone: (383)243-94-75, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Olga E. Belousova
Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, Ph. D., Senior Researcher, phone: (383)335-97-50, e-mail: o.e.belousova@mail.ru

Larisa L. Efimenko
Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Assistant Professor, Chair of Mathematics and Natural Sciences, phone: (383)224-27-31, e-mail: efimenko.larisa@gmail.com

Irina V. Gutarova
Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Senior Lecturer, Chair of Mathematics and Natural Sciences, phone: (383)243-94-75, e-mail: max_ira@ngs.ru

Irina V. Frolova
Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Senior Lecturer, Chair of Mathematics and Natural Sciences, phone: (383)243-94-75, e-mail: sten9@rambler.ru

Larisa I. Torgashova
Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Senior Lecturer, Chair of Mathematics and Natural Sciences, phone: (383)243-94-75, e-mail: aspirant_igd@mail.ru

In the framework of the Leibenzon-Ishlinsky approach, the problem of stability loss of cylindrical pillar in a mine working is solved. The pillar material was assumed initially anisotropic and corresponding to the layered structure. A criterion for stability loss is constructed, a solution to the system of differential equations in the form of combined cylindrical and trigonometric functions is determined. From the fact that determinant of a system of homogeneous algebraic equations is equal to zero, the critical load is found at which, along with the main continuation of pillar deformation, other is possible with a changed surface geometry. The influence of the initial anisotropy and pillar parameters (height, radius) on the values of ultimate load is investigated.

Key words: stability, anisotropy, critical load, anisotropy effect, problem solution, axisymmetric deformation.

В [1-8] рассматривались задачи о потере устойчивости конструкций, находящихся в условиях плоской деформации (бесконечно длинная полоса, контур цилиндрической выработки и т.д.). Было предложено понятие бифуркации, когда при каком-то значении нагрузки $P = P_*$ возможно существование не только продолжения основного процесса деформирования, но и другого, бесконечно близкого к основному, но с искривленными границами исследуемой конструкции.

Ниже предлагается подход Лейбензона-Ишлинского распространить на случай деформирования конструкций не в условиях плоской деформации, а в условиях осесимметричной деформации. Причем материал предполагается не первоначально изотропным, а первоначально анизотропным, имеющим слоистую структуру. В этой обстановке требуется найти такое значение сжимающей нагрузки $p = p_*$, действующей на целик горной выработки, при котором произойдет бифуркация процесса его деформирования.

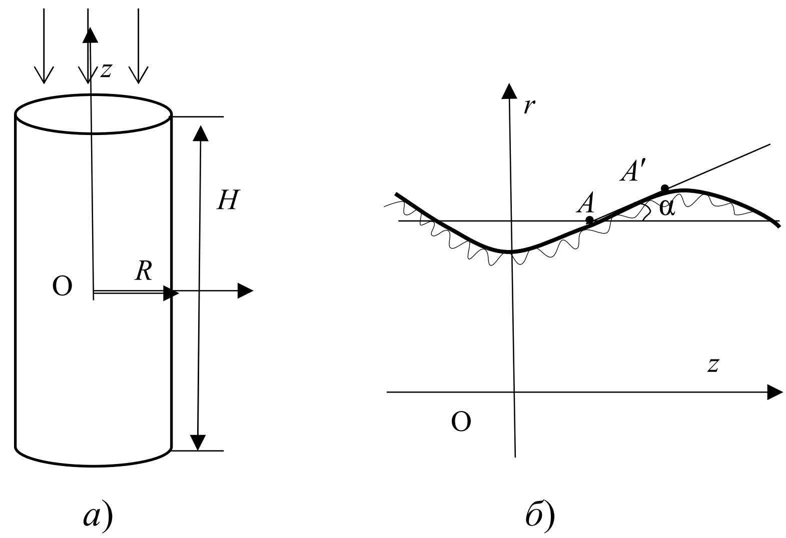

Рис. 1. Целик горной выработки, находящийся под давлением нагрузки (*а*). При достижении нагрузкой критического значения происходит изменение геометрии поверхности целика (*б*)

Рассмотрим решение заявленной задачи.

Пусть имеется целик горной выработки в виде цилиндра радиуса R и высоты H (рис.1).

Пусть материал целика деформируется в упругости по закону Гука вида

$$\begin{cases} \sigma_r = A\varepsilon_r + B\varepsilon_\varphi + C\varepsilon_z, \\ \sigma_\varphi = B\varepsilon_r + A\varepsilon_\varphi + C\varepsilon_z \\ \sigma_z = C\varepsilon_r + C\varepsilon_\varphi + D\varepsilon_z \\ \tau_{rz} = E\varepsilon_{rz}. \end{cases}, \qquad (1)$$

Здесь A, B, C, D, E – жесткости, где в общем случае $A \neq D, B \neq C, E \neq A - B$. Из этих условий следует, что (1) описывает поведение слоистой среды, где слои параллельны плоскости $z = 0$ потому, что при одной и той же нагрузке, действующей по осям r, φ, z, деформация вдоль оси z будет иной, чем вдоль осей r, φ (здесь r, φ, z – оси цилиндрической системы координат).

Далее предполагается, что целик находится под действием сжимающей нагрузки, т. е. тензоры напряжений и деформаций до момента потери устойчивости имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi \neq \varepsilon_z$.

Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

деформации – соотношениям Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{4}$$

где u, v – смещения.

В момент потери устойчивости к состоянию (2) добавляется состояние

$$T_{\Delta\sigma} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_r & \Delta\tau_{rz} & 0 \\ \Delta\tau_{rz} & \Delta\sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\sigma_\varphi \end{pmatrix}, \quad T_{\Delta\varepsilon} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_r & \Delta\varepsilon_{rz} & 0 \\ \Delta\varepsilon_{rz} & \Delta\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\varepsilon_\varphi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\Delta\varepsilon_r = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial r}, \ldots;$ $\Delta u, \Delta w$ - приращения перемещений. Таким образом в момент потери устойчивости напряженное состояние является суммой состояний $T_\sigma + T_{\Delta\sigma}$, деформированное состояние есть $T_\varepsilon + T_{\Delta\varepsilon}$. Следуя [1-3], на искривленной поверхности массивной конструкции получаем следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_r \big|_\Gamma = 0, \\ \Delta\sigma_{rz} \big|_\Gamma = \sigma_z \dfrac{\partial \Delta w}{\partial r}, \end{cases} \tag{6}$$

где Γ - поверхность тела до момента потери устойчивости.

Задача: найти значение напряжения σ_z, при котором величины $\Delta\sigma_{ij}$ удовлетворяют уравнениям равновесия (3), связаны с приращениями деформаций $\Delta\varepsilon_{kl}$ соотношениями закона Гука (1), деформации $\Delta\varepsilon_{kl}$ выражаются через приращения смещений $\Delta u, \Delta w$ с помощью (4).

Приведем решение задачи. Подставим (4) в (1), (1) в (3). В результате для определения Δu и Δw находим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta u}{\partial r} - \dfrac{\Delta u}{r^2} + \dfrac{E}{2A}\dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} + \dfrac{2C+E}{2A}\dfrac{\partial^2 \Delta w}{\partial r \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial r \partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta u}{\partial z} + \dfrac{E}{E+2C}\left(\dfrac{\partial^2 \Delta w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta w}{\partial r}\right) + \dfrac{2D}{E+2C}\dfrac{\partial^2 \Delta w}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решение (7) разыскиваем в виде

$$\Delta u = MZ_1(\lambda r)\operatorname{ch} pz, \ \ \Delta w = NZ_0(\lambda r)\operatorname{sh} pz, \tag{8}$$

где Z_0, Z_1 – цилиндрические функции нулевого и первого порядка соответственно [9]; M, N, λ, p – произвольные константы.

Подстановка (8) в (7) приводит к следующей однородной системе линейных алгебраических уравнений для определения констант M и N:

$$\begin{cases} \left(-\lambda^2 + \dfrac{E}{2A}p^2\right)\cdot M - \dfrac{2C+E}{2A}\lambda p \cdot N = 0, \\ \lambda p \cdot M + \left(-\dfrac{E\lambda^2}{E+2C} + \dfrac{2D}{E+2C}\cdot p^2\right)\cdot N = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для существования ненулевого решения (9) необходимо, чтобы определитель системы (9) обратился в ноль. В результате получаем характеристическое уравнение

$$\left(\frac{\lambda}{p}\right)^4 - 2\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 \frac{AD - C^2 - EC}{AE} + \frac{D}{A} = 0. \tag{10}$$

для определения $\dfrac{\lambda}{p}$.

Отметим, что для первоначально изотропной среды

$$A = D, B = C, E = A - B,$$

поэтому уравнение (10) превращается в простейшее с кратными корнями, равными 1:

$$\left(\frac{\lambda}{p}\right)^4 - 2\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 + 1 = 0.$$

Решая (10), получем

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^2_{1,2}=\dfrac{AD-C^2-EC}{AE}+\sqrt{\left(\dfrac{AD-C^2-EC}{AE}\right)^2-\dfrac{D}{A}},\\ \left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^2_{3,4}=\dfrac{AD-C^2-EC}{AE}-\sqrt{\left(\dfrac{AD-C^2-EC}{AE}\right)^2-\dfrac{D}{A}}.\end{cases} \qquad (11)$$

Из (11) следует, что $\lambda_1=-\lambda_2$, $\lambda_3=-\lambda_4$. Поэтому общее решение (7), исходя из четности и нечетности цилиндрических функций Z_0, Z_1, может быть записано в виде:

$$\begin{cases}\Delta u=\left[(M_1-M_2)Z_1(\lambda_1 r)+(M_3-M_4)Z_1(\lambda_3 r)\right]\operatorname{ch} pz,\\ \Delta w=\left[(N_1+N_2)Z_0(\lambda_1 r)+(N_3+N_4)Z_0(\lambda_3 r)\right]\operatorname{sh} pz,\end{cases} \qquad (12)$$

где константы M_i связаны с константами N_i $(i=1,\dots 4)$ соотношениями

$$M_i=\left[\frac{E}{E+2C}\left(\frac{\lambda}{p}\right)_i-\frac{2D}{E+2C}\left(\frac{p}{\lambda}\right)_i\right]N_i, \qquad (13)$$

следующими из (9).

Несколько слов о четности и нечетности функций Δu, Δw. Из физических соображений понятно, что функция Δu должна быть нечетной функцией координаты *r*, т.е.

$$\Delta u\big|_{r=R}=-\Delta u\big|_{r=-R}, \qquad (14)$$

функция Δw – четной функцией координаты *r*:

$$\Delta w\big|_{r=R}=\Delta w\big|_{r=-R}. \qquad (15)$$

Учитывая нечетность функции Z_1 и четность функции Z_0 [9], получаем на основании рассмотрения (12), (14), (13), (15), что $M_2=-M_1$, $N_1=N_2$ в силу $\lambda_1=-\lambda_2$, $M_3=-M_4$, $N_3=N_4$ в силу $\lambda_3=-\lambda_4$. Поэтому

$$\begin{cases}\Delta u=\left[2M_1Z_1(\lambda_1 r)+2M_3Z_1(\lambda_3 r)\right]\operatorname{ch} pz,\\ \Delta w=2\left[N_1Z_0(\lambda_1 r)+N_3Z_0(\lambda_3 r)\right]\operatorname{sh} pz.\end{cases} \qquad (16)$$

Осталось удовлетворить граничным условиям (6) при $r=R$, где *R* – радиус целика.

Учитывая (1), имеем

$$\begin{cases} \Delta\sigma_r = A\dfrac{\partial \Delta u}{\partial r} + B\dfrac{\Delta u}{r} + C\dfrac{\partial \Delta w}{\partial z}\Big|_{r=R} = 0, \\ \Delta\tau_{rz} = E\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Delta w}{\partial r} + \dfrac{\partial \Delta u}{\partial z}\right)\Big|_{r=R} = -P_*\dfrac{\partial \Delta u}{\partial z}, \end{cases} \tag{17}$$

где $\sigma_z = -P_*$ в момент потери устойчивости целика.

Подставляя (16) в (17), находим уравнения отыскания констант N_1, N_3:

$$\begin{cases} A\left[M_1\left(\lambda_1 Z_0(\lambda_1 r) - \dfrac{Z_1(\lambda_1 r)}{r}\right) + M_3\left(\lambda_3 Z_0(\lambda_3 r) - \dfrac{Z_1(\lambda_3 r)}{r}\right)\right] + \\ + B\left[\dfrac{M_1 Z_1(\lambda_1 r)}{r} + \dfrac{M_3 Z_1(\lambda_3 r)}{r}\right] + \\ C\left[N_1 Z_0(\lambda_1 r) + N_3 Z_0(\lambda_{31} r)\right]p = 0, \\ E\dfrac{1}{2}\left(-N_1 Z_1(\lambda_1 r)\lambda_1 - N_3 Z_1(\lambda_3 r)\lambda_3\right) + \left(P_* + \dfrac{E}{2}\right)\left(M_1 Z_1(\lambda_1 r) + M_3 Z_1(\lambda_3 r)\right)p = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) при условиях (13) является однородной системой линейных уравнений для определения этих констант N_1 и N_3. Ее определитель должен обратиться в ноль для существования ненулевого решения. Выражая определитель, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{matrix}(AL_1\lambda_1 + Cp)RZ_0(\lambda_1 R) + \\ + (B - A)L_1 Z_1(\lambda_1 R)\end{matrix} & \begin{matrix}(AL_3\lambda_3 + Cp)RZ_0(\lambda_3 R) + \\ + (B - A)L_3 Z_1(\lambda_3 R)\end{matrix} \\ \left[\left(P_* + \dfrac{E}{2}\right)L_1 p - \dfrac{E}{2}\lambda_1\right]RZ_1(\lambda_1 R) & \left[\left(P_* + \dfrac{E}{2}\right)L_3 p - \dfrac{E}{2}\lambda_3\right]RZ_1(\lambda_3 R) \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

где величины L_1, L_3 следуют из (13) при записи: $M_1 = L_1 N_1,\ M_3 = L_3 N_3$.

(19) – это уравнение для определения P_*.

В это выражение входит величина *p*, связанная с гиперболическими функциями с помощью (8). Эти функции неограниченны с возрастанием координаты *z* при вещественном значении *p*. Для устранения неограниченности функции Δw рассмотрим такой случай, когда

$$p = i\frac{\pi}{H}. \tag{20}$$

Тогда $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} i\dfrac{\pi}{H}z = i\sin\dfrac{\pi z}{H}$. С учетом (20) получаем на основе (8)

$$\Delta w\big|_{z=0} = 0,\ \Delta w\big|_{z=\frac{H}{2}} = iNZ_0(\lambda r) = -\Delta w\big|_{z=-\frac{H}{2}},$$

как и должно быть для целика с началом координат, взятом в центре целика.

Таким образом при вычислении определителя Δ согласно (19) получаем в нем значение *p*, равном (20).

Разрешая (19) относительно P_*, находим выражение

$$P_* = \frac{E}{2}\left[(L_1 p - \lambda_1) Z_1(\lambda_1 R)\cdot \Sigma_2 - (L_3 p - \lambda_3) Z_1(\lambda_3 R)\cdot \Sigma_1\right] / \\ /\left(L_3 p Z_1(\lambda_3 R)\cdot \Sigma_1 - L_1 p Z_1(\lambda_3 R)\cdot \Sigma_2\right), \tag{21}$$

где

$$\begin{cases} \Sigma_1 = (AL_1\lambda_1 + Cp)RZ_0(\lambda_1 R) + (B-A)L_1 Z_1(\lambda_1 R), \\ \Sigma_2 = (AL_3\lambda_3 + Cp)RZ_0(\lambda_3 R) + (B-A)L_3 Z_1(\lambda_3 R), \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{E}{E+2C}\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)_1 - \dfrac{2D}{E+2C}\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)_1, \\ L_3 = \dfrac{E}{E+2C}\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)_3 - \dfrac{2D}{E+2C}\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)_3. \end{cases} \tag{23}$$

Отметим, что выражение для P_* из (21) является вещественным числом. Это следует из определения цилиндрических функций $Z_0(\lambda R)$ и $Z_1(\lambda R)$:

$$Z_0(\lambda R) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\lambda R}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 - \left(\frac{\lambda R}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda R}{2}\right)^4 + \ldots$$

$$Z_1(\lambda R) = -Z_0'(\lambda R) = \frac{\lambda R}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\lambda R}{2}\right)^{2k}}{k!(k+1)!} = \frac{\lambda R}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{\lambda R}{2}\right)^2}{2} + \ldots\right),$$

где λ в силу (11), (20) является чисто мнимым числом.

В работе приводятся зависимости критической нагрузки P_* от отношения R/H и от отношений жесткостей

$$\frac{D}{E},\ \frac{C^2}{AE},\ \frac{C}{A},\ \frac{D}{A},\ \frac{C}{E}.$$

В качестве точки отсчета взят случай первоначально изотропной среды.

Выводы:

1. Решена задача о потере устойчивости целика цилиндрической формы с первоначальной анизотропией материала.

2. Исследовано влияние анизотропии, геометрических размеров целика на величину критической нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-05-00757а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. трудов, Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 468 с.

2. Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С.140-146.

3. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Учебное пособие для студентов ун-тов и втузов. – Киев: Вища школа. – 1986. – 511 с.

4. Жуков А.И. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении // Инженер. сб. – 1949. – Т.5. – вып. 2. – С. 34–51.

5. Ершов Л.В., Зельдич Е.И. Исследование устойчивости равновесия пространственных деформируемых тел // ДАН СССР. – 1979.-Т.245. – № 1. – С.47–50.

6. Ершов Л.В. О постановке задач устойчивости горных выработок // ДАН СССР. – 1962.-Т.243. – № 2. – С. 305–307.

7. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука. – 1982. – 270 с.

8. Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей, посвященных 70-летию ученого-механика, профессора, доктора технических наук Леонида Викторовича Ершова / ред. А. Ю. Ишлинский. – М. : Изд-во МГГУ. – 2001. – 372 с.

9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Изд-во ФИЗМАТГИЗ. – 1963. – 1100 с.