

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ИЛИ ЕЕ УЧАСТКА В СЛУЧАЕ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ ВЕКТОРАХ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ

Анвар Исмагилович Чанышев

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, тел. (383)205-30-30, доб. 716; Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52, зав. кафедрой математики и естественных наук, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Ильгизар Маратович Абдулин

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, научный сотрудник, тел. (383)205-30-30, доб. 716, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru

Ольга Анваровна Лукьяшко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, инженер, тел. (383)205-30-30, доб. 716, e-mail: lykola@yandex.ru

Рассматривается идеально-пластическое состояние материала при условиях – пластичности Мизеса, пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций (деформационная теория пластичности) и упругого изменения объема. При заданных на поверхности тела (с указанным состоянием) или ее участке векторах напряжений Коши и перемещений восстанавливаются на этой поверхности все шесть компонент тензора напряжений, все шесть компонент тензора деформаций, а так же три компоненты вектора поворота. Этот метод определения НДС можно отнести к экспресс-методам оценки состояния конструкции (поверхности тела) потому, что не привлекаются дифференциальные уравнения внутри тела.

Ключевые слова: напряжения, деформации, поворот, вектор напряжений Коши, вектор перемещений, оценка состояния.

DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF THE BODY SURFACE OR ITS AREA IN CASE OF PERFECT PLASTICITY AT GIVEN STRESS AND DISPLACEMENT VECTORS

Anvar I. Chanyshev

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, D. Sc., Chief Researcher, phone: (383)205-30-30, extension 716; Novosibirsk State University of Economics and Management, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Head of Chair of Mathematics and Natural Sciences, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Ilgizar M. Abdulin

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, Researcher, phone: (383)205-30-30, extension 716, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru

Olga A. Lukyashko

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, Engineer, phone: (383)205-30-30, extension 716, e-mail: lykola@yandex.ru

Ideally plastic state of material under conditions of Mises plasticity, proportionality of stress and strain deviators (deformation theory of plasticity) and elastic volume change is considered. Given the Cauchy stress and displacement vectors specified on the body surface (with indicated state) or its area, all six components of the stress tensor, all six components of the strain tensor, and also three components of the rotation vector are restored on this surface. This method for determining the stress-strain state can be related to the methods of rapid assessment of the structure state (body surface), since differential equations inside the body are not involved.

Key words: stresses, strains, rotation, Cauchy stress vector, displacement vector, assessment of state.

Существуют первая, вторая, третья задачи механики деформируемого тела. В первой задаче на поверхности тела задается вектор напряжений, во второй – вектор перемещений, в третьей – на части вектор напряжений, на другой части – вектор перемещений (смешанная задача). При этом для определения НДС поверхности тела (или ее участка) необходимо внутри тела решать дифференциальные уравнения, удовлетворять условиям совместности деформаций, знать краевые условия на других поверхностях внутри тела, знать всю его внутреннюю и внешнюю структуру. Поставленная задача требует выполнения определенных усилий и затраты времени. Вместе с тем существует достаточно простой метод определения НДС поверхности тела (или его части), требующий знания на этой поверхности в одно и то же время вектора напряжений Коши и вектора перемещений. С точки зрения классики получается переопределенная задача. Вместе с тем решение указанной задачи существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Покажем это на основе применения соотношений идеальной пластичности.

Прежде сформулируем их. Имеем прямоугольную декартову систему координат $xOyz$, в ней тензоры напряжений T_σ и деформаций T_ε :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вводится тензорный базис с ортами

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$T_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис (2) является ортонормированным и ортогональным, если скалярное произведение тензоров вида (1) определить как $(T_\sigma, T_\varepsilon) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, где по повторяющимся индексам производится свертка [1]. Координаты T_σ в базисе (2) равны

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), S_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_x - 2\sigma_y + \sigma_z), S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_z), \\ S_4 = \sqrt{2}\tau_{xy}, S_5 = \sqrt{2}\tau_{xz}, S_6 = \sqrt{2}\tau_{yz}. \end{cases} \quad (3)$$

Выражая напряжения через координаты S_1, S_2, \dots, S_6 , получаем

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{S_1}{\sqrt{3}} + \frac{S_2}{\sqrt{6}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}}, \sigma_y = \frac{S_1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}}S_2, \sigma_z = \frac{S_1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}S_2 - \frac{S_3}{\sqrt{2}}, \\ \tau_{xy} = \frac{S_4}{\sqrt{2}}, \tau_{xz} = \frac{S_5}{\sqrt{2}}, \tau_{yz} = \frac{S_6}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (4)$$

Вычисляя координаты T_ε в базисе (2), обозначаем их как $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$. Говоря о базисе (2), следует напомнить, что тензор T_1 с точностью до постоянного множителя совпадает с шаровым тензором, а орты T_2, T_3, \dots, T_6 , определяют собой девiatorное пространство. Если теперь обратиться к деформационной теории пластичности Генки-Надаи-Ильюшина [2, 3], то она в наших обозначениях постулирует, что

$$\Omega_1 = \frac{S_1}{K}, \text{ где } K = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad (5)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Равенство (5) справедливо в упругости, в пластичности, в ползучести и т.д. [2-5], оно выражает собой закон упругого изменения объема при гидростатическом обжатии элемента среды. Другое положение деформационной теории пластичности состоит в том, что

девиатор $D_\sigma = \sum_{i=2}^6 S_i T_i$ в упругопластическом состоянии среды параллелен девиатору $D_\varepsilon = \sum_{i=2}^6 \Omega_i T_i$. Условие параллельности переписывается в координатах:

$$\frac{S_2}{\Omega_2} = \frac{S_3}{\Omega_3} = \dots = \frac{S_6}{\Omega_6} = 2\mu_c. \quad (6)$$

Приравниваем эти отношения параметру $2\mu_c$ ($2\mu_c$ – секущий модуль), отсюда

$$S_2 = 2\mu_c \Omega_2, S_3 = 2\mu_c \Omega_3, \dots, S_6 = 2\mu_c \Omega_6. \quad (7)$$

Для теории идеальной пластичности длина девиатора D_σ есть величина постоянная, обозначим ее как k :

$$\sqrt{S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_6^2} = k, \quad (8)$$

где k – предел пластичности – характеристика материала, определяемая экспериментально. Вычисляя (8) с применением (7), получаем

$$k = 2\mu_c |D_\sigma|. \quad (9)$$

На рис. 1 представлена зависимость $|D_\sigma|$, как функция $|D_\varepsilon|$.

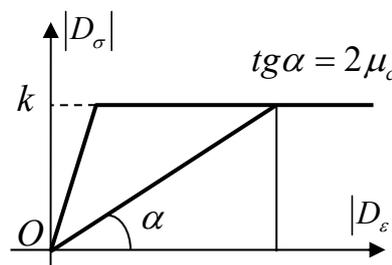


Рис. 1. Зависимость $|D_\sigma| \div |D_\varepsilon|$ для случая идеальной пластичности, $2\mu_c$ – секущий модуль на диаграмме $k \div |D_\varepsilon|$

Видно, что секущий модуль $2\mu_c$ изменяется с ростом $|D_\varepsilon|$ от значения $2\mu = E / (1 + \nu)$ до 0 при $|D_\varepsilon| \rightarrow \infty$.

Покажем, как по заданному на поверхности тела вектору напряжений Коши и по заданному на той же поверхности вектору перемещений (всего заданных величин шесть!) возможно найти на этой же поверхности все шесть компонент тензора напряжений, все шесть компонент тензора деформаций и еще три координаты вектора поворота (всего 15 величин).

Пусть уравнение поверхности, на которой требуется найти указанные величины, имеет вид

$$y = f(x, z), \quad (10)$$

где f – дифференцируемая функция по координатам x, z .

Перепишем (10) в виде

$$\Phi(x, y, z) = y - f(x, z). \quad (11)$$

Градиент $\Phi(x, y, z)$

$$\text{grad}\Phi(x, y, z) = (-f'_x, 1, -f'_z)$$

направлен по нормали к поверхности (10) или (11). Его длина равна

$$|\vec{N}| = \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}. \quad (12)$$

Отсюда направляющие косинусы единичной нормали \vec{n} к поверхности (10) определяются как

$$n_x = -\frac{f'_x}{|\vec{N}|}, \quad n_y = \frac{1}{|\vec{N}|}, \quad n_z = -\frac{f'_z}{|\vec{N}|}. \quad (13)$$

Пусть на поверхности (10) задан вектор напряжений Коши. С учетом (4)-(6), (13) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left[\frac{K\Omega_1}{\sqrt{3}} + 2\mu_c \left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}} \right) \right] f'_x - 2\mu_c \frac{\Omega_4}{\sqrt{2}} + 2\mu_c \frac{\Omega_5}{\sqrt{2}} f'_z = \tilde{p}_x^n, \\ 2\mu_c \frac{\Omega_4}{\sqrt{2}} f'_x - \left[\frac{K\Omega_1}{\sqrt{3}} - 2\mu_c \frac{2\Omega_2}{\sqrt{6}} \right] + 2\mu_c \frac{\Omega_6}{\sqrt{2}} f'_z = \tilde{p}_y^n, \\ 2\mu_c \left(\frac{\Omega_5}{\sqrt{2}} f'_x - \frac{\Omega_6}{\sqrt{2}} \right) + \left[\frac{K\Omega_1}{\sqrt{3}} + 2\mu_c \left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} - \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}} \right) \right] f'_z = \tilde{p}_z^n, \end{cases} \quad (14)$$

где $\tilde{p}_x^n, \tilde{p}_y^n, \tilde{p}_z^n$ – координаты вектора напряжений Коши,

$$\tilde{p}_x^n = -p_x^n |\vec{N}|, \quad \tilde{p}_y^n = -p_y^n |\vec{N}|, \quad \tilde{p}_z^n = -p_z^n |\vec{N}|,$$

$|\vec{N}|$ определяется (12). Отметим, что в случае поверхности, свободной от напряжений $p_x^n = p_y^n = p_z^n = 0$.

Пусть на поверхности (10) кроме (14) заданы еще перемещения u_x, u_y, u_z вдоль осей x, y, z . Рассмотрим полные дифференциалы функций u_x, u_y, u_z как функции координат x, y, z . Имеем

$$\begin{cases} du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\ du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \dots, \\ du_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \dots \end{cases} \quad (15)$$

На поверхности (10) $dy = f'_x dx + f'_z dz$, поэтому здесь

$$\begin{cases} du_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} f'_x \right) dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) dz, \\ du_y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} f'_x \right) dx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dz, \\ du_z = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} f'_x \right) dx + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz. \end{cases} \quad (16)$$

Заданные на поверхности (10) функции $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ получают значения $\varphi(x, f(x, z), z) = \varphi_1(x, z)$, $\psi(x, f(x, z), z) = \psi_1(x, z)$, $\chi(x, f(x, z), z) = \chi_1(x, z)$. Отсюда

$$du_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz, \quad du_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} dy, \quad du_z = \frac{\partial \chi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} dy. \quad (17)$$

Сравнивая (16) с (17), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} f'_x, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} f'_x, & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} f'_x, & \frac{\partial \chi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y} f'_z + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (18)$$

Используя выражения деформаций и компонент вектора поворота через смещения u_x, u_y, u_z , перепишем (18) в терминах указанных величин:

$$\begin{cases} \varepsilon_x + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) f'_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} + \omega_z + \varepsilon_y f'_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xz} - \omega_y + (\varepsilon_{yz} + \omega_x) f'_x = \frac{\partial \chi_1}{\partial x}, & (\varepsilon_{xy} - \omega_z) f'_z + \varepsilon_{xz} + \omega_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \\ \varepsilon_y f'_z + \varepsilon_{yz} - \omega_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, & (\varepsilon_{yz} + \omega_x) f'_z + \varepsilon_z = \frac{\partial \chi_1}{\partial z}. \end{cases} \quad (19)$$

Исключая в (19) компоненты вектора поворота, получаем систему уравнений для деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_x + 2\varepsilon_{xy}f'_x + \varepsilon_y f_x'^2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + f'_x \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \\ \varepsilon_z + 2\varepsilon_{yz}f'_z + \varepsilon_y f_z'^2 = \frac{\partial\chi_1}{\partial z} + f'_z \frac{\partial\psi_1}{\partial z}, \\ -f_z'^2 \varepsilon_x - f_x'^2 \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xz}f'_x f'_z = \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) f'_x f'_z - \frac{\partial\chi_1}{\partial z} f_x'^2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} f_z'^2. \end{cases} \quad (20)$$

Подставляя в (20) соотношения вида (4) для деформаций, находим

$$\begin{cases} \frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}} + \frac{2\Omega_4}{\sqrt{2}} f'_x + \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} - \frac{2\Omega_2}{\sqrt{6}}\right) f_x'^2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + f'_x \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \\ \frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} - \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}} + \frac{2\Omega_6}{\sqrt{2}} f'_z + \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} - \frac{2\Omega_2}{\sqrt{6}}\right) f_z'^2 = \frac{\partial\chi_1}{\partial z} + f'_z \frac{\partial\psi_1}{\partial z}, \\ -\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}}\right) f_z'^2 - \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{6}} - \frac{\Omega_3}{\sqrt{2}}\right) f_x'^2 + \frac{2\Omega_5}{\sqrt{2}} f'_x f'_z = \\ = \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) f'_x f'_z - \frac{\partial\chi_1}{\partial z} f_x'^2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} f_z'^2. \end{cases} \quad (21)$$

Введем обозначения

$$f'_x = \alpha, \quad f'_y = \beta. \quad (22)$$

Кроме того поделим каждое из уравнений (14) на величину $2\mu_c$, при этом введем еще обозначения

$$\frac{K}{2\mu_c} = \tilde{K}, \quad \frac{\tilde{p}_x^n}{2\mu_c} = F_1, \quad \frac{\tilde{p}_y^n}{2\mu_c} = F_2, \quad \frac{\tilde{p}_z^n}{2\mu_c} = F_3.$$

Также через F_4, F_5, F_6 переобозначим правые части (21). В результате этих переобозначений получаем следующую систему уравнений для отыскания значений $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha\tilde{K}}{\sqrt{3}}\Omega_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{6}}\Omega_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\Omega_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_4 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\Omega_5 = F_1, \\ -\frac{\tilde{K}}{\sqrt{3}}\Omega_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\Omega_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\Omega_4 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\Omega_6 = F_2, \\ \frac{\beta\tilde{K}}{\sqrt{3}}\Omega_1 + \frac{\beta}{\sqrt{6}}\Omega_2 - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\Omega_3 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\Omega_5 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_6 = F_3, \\ \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{3}}\Omega_1 + \frac{1-2\alpha^2}{\sqrt{6}}\Omega_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_3 + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}\Omega_4 = F_4, \\ \frac{1+\beta^2}{\sqrt{3}}\Omega_1 + \frac{1-2\beta^2}{\sqrt{6}}\Omega_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_3 + \frac{2\beta}{\sqrt{2}}\Omega_6 = F_5, \\ -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{3}}\Omega_1 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{6}}\Omega_2 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{2}}\Omega_3 + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{2}}\Omega_5 = F_6, \end{cases} \quad (23)$$

Вычисляя определитель системы (23), находим, что он равен

$$\Delta = \frac{\tilde{K} + 2}{6} \sqrt{2\alpha\beta} |\vec{N}|^3, \quad (24)$$

где $|\vec{N}|$ определяется (12) ($|\vec{N}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}$).

Из (24) следует, что в случаях $\tilde{K} + 2 \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ решение (23) существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных.

Вычисляя Ω_1 , находим

$$\Omega_1 = \frac{\alpha F_1 - F_2 + \beta F_3 + F_4 + F_5 - F_6}{(\tilde{K} + 2) |\vec{N}|}. \quad (25)$$

Вычисляя Ω_2 , получаем

$$\Omega_2 = \frac{(\alpha F_1 + F_2 + \beta F_3 - F_6)(|\vec{N}|^2 + 1 + 2\tilde{K}) + (F_4 + F_5 - 2F_2)(|\vec{N}|^2 - 1 + (|\vec{N}|^2 - 2)\tilde{K})}{2|\vec{N}|^2 (\tilde{K} + 2)}. \quad (26)$$

Аналогично находим другие деформации $\Omega_3, \Omega_4, \dots, \Omega_6$.

Зная их, составляем величину $|D_\varepsilon| = \sqrt{\sum_{i=2}^6 \Omega_i^2}$. Она необходима для того, чтобы скорректировать новое значение величины $2\mu_c$. Согласно рис. 1

$$2\mu_c = \frac{k}{|D_\varepsilon|}. \quad (27)$$

После вычисления $2\mu_c$ согласно (27) производится повторный пересчет всех деформаций, величины $|D_\varepsilon|$. Вновь строится величина $2\mu_c$ согласно (27). Итерации заканчиваются, когда разность между величинами $|2\mu_c^{n+1} - 2\mu_c^n|$ будет меньше наперед заданной величины ε .

После нахождения деформаций $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$ восстанавливаются напряжения S_1, S_2, \dots, S_6 , по ним находятся согласно (4) напряжения σ_{ij} . С применением (19) определяются все значения компонент вектора поворота.

Выводы

Показано, как при заданных на одной и той же поверхности тела векторах напряжений Коши и смещений в условии идеальной пластичности восстанавливаются на этой поверхности все компоненты тензоров напряжений и дефор-

маций, все компоненты вектора поворота. Показано, что решение этой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ (№ 18-05-00757 А).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новожилов В.В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. – 1963. – Т. 27. – Вып. 5. – С. 794–812.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. том 1. М.: ИЛ, 1954. – 648 с.
3. Ильюшин А.А. К Теории малых упругопластических деформаций // ПММ. – 1946. – Т. 10. – Вып 3. – С. 347–356.
4. Жуков А.М. Пластические свойства и разрушения стали при двухосном напряженном состоянии // Инженерный сборник. – 1954. – Т. 20. – С. 37–41.
5. Аннин Б.Д., Жигалкин В.М. Поведение материалов при сложном напряженном состоянии. – Новосибирск: Известия СОРАН, 1999. – 342 с.

© А. И. Чаньшев, И. М. Абдулин, О. А. Лукьяшко, 2020