

## **К ВОПРОСУ ОБ УРАВНИВАНИИ СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ОБЩЕЗЕМНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА**

*Владимир Абрамович Падве*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (923)121-96-56, e-mail: evdapav@mail.ru

*Николай Сергеевич Косарев*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной геодезии и маркшейдерского дела, тел. (913)706-91-95, e-mail: kosarevnsk@yandex.ru

Дискутируется вопрос обработки ГНСС-измерений, выполняемых для включения нового пункта в «жесткую» сеть. Сравняются два варианта такого включения: «лучевой» и «сетевой». В качестве объекта, на котором проводился вычислительный эксперимент, тестирующий теорию данного вопроса, выступал фрагмент спутниковой сети ПДБС НСО, включающий в себя пять опорных пунктов основной сети и один – определяемый. Обработка измерений была выполнена в электронной вычислительной таблице Excel с использованием алгоритма синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации пространственных данных. Полученные в результате обработки координаты определяемого пункта сети и их средние квадратические ошибки оказались идентичными для обоих вариантов, что и следует из теории МНК-оптимизации результатов измерений с учетом погрешностей координат опорных пунктов.

**Ключевые слова:** алгоритм синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации данных, ГНСС-измерения, спутниковая сеть, «лучевой», «сетевой».

## **THE ISSUE OF LS-OPTIMIZATION SATELLITE GEODETIC NETWORKS IN THE TERRESTRIAL COORDINATE SYSTEM**

*Vladimir A. Padve*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10 Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D, Associate Professor, Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (923)121-96-56, e-mail: evdapav@mail.ru

*Nikolay S. Kosarev*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10 Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D, Associate Professor, Department of Engineering Geodesy and Mine Surveying, phone: (913)706-91-95, e-mail: kosarevnsk@yandex.ru

The issue of processing GNSS measurements performed to add a new item into a "hard" network is discussed. Two variants of this add: «beam» and «network» are compared. A fragment of the satellite network, which includes five "hard" points of the main network and one defined, acted as the object on which the computational experiment was carried out, testing the theory of this question. The processing of observational materials is implemented in to Excel electronic computational table

using an algorithm synthesized version of the parametric version of LS-optimization of spatial data. The «insert» coordinates obtained as a result of this processing and their average square errors were identical for both variants, which is what follows from the theory of LS-optimization of measurement results taking into account of the errors of the coordinates of «hard» points.

**Key words:** algorithm of synthesized variant of parametric version of LS-optimization of geospatial data, GNSS-measurements, satellite network, «beam», «network».

## *Введение*

В настоящее время государственные геодезические, опорные маркшейдерские, опорные межевые и другие сети создаются с помощью глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). Такие сети обеспечивают высокую точность нахождения приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , сопровождаемых соответствующими ковариационными матрицами  $K_{\Delta}$ . По этим данным на следующих этапах вычисляются сами геоцентрические координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  пунктов сети.

Спутниковые геодезические сети, также как и классические сети, строятся по принципу «от общего к частному», который предусматривает развитие сетей в строгой иерархии в зависимости от своей точности. В соответствии с [1, 2] структура государственной геодезической сети (ГГС) представлена пунктами фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС), высокоточной геодезической сети (ВГС), спутниковой геодезической сети 1 класса (СГС-1). В структуру ГГС также входят ранее созданные геодезические сети – астрономо-геодезическая сеть 1 и 2 классов (АГС) и геодезическая сеть сгущения 3 и 4 классов (ГСС).

В работе [3] предлагается новая, двухуровневая структура опорной геодезической сети, реализующая объединенную координатную основу на территории Российской Федерации (РФ). Первый уровень предлагаемой опорной геодезической сети представлен пунктами ФАГС, ВГС и сертифицированными пунктами постоянно - действующих базовых станций (ПДБС-1), а также наземными навигационными системами (ННС-1) типа Locata, обеспечивающими субдециметровый уровень точности позиционирования. Второй уровень опорной геодезической сети состоит из пунктов СГС-1, АГС, ГСС и несертифицированных пунктов ПДБС-2, а также наземных навигационных систем (ННС-2) типа eLoran. Предлагаемая структура опорной геодезической сети позволит пользователю оперативно получать актуальную геопространственную информацию с требуемой точностью.

Одной из важнейших задач в процессе построения спутниковых геодезических сетей является определение координат начального пункта  $A$  новой сети. Неточное знание координат пункта  $A$  приводит к относительной средней квадратической ошибке (СКО) определения длины базовой линии  $D$ , оцениваемой согласно [4, 5], так:

$$\frac{m_D}{D} = 0,3 \cdot \frac{m_A}{R}, \quad (1)$$

где  $m_D$  – СКО определения длины базовой линии;

$D$  – длина базовой линии;

$m_A = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2}$  – СКО положения начального пункта сети;

$R$  – средний радиус кривизны референц-эллипсоида в точке  $A$ .

Для привязки начального пункта новой сети к исходной геодезической основе с помощью ГНСС-технологий используют, в основном, два способа: «сетевой» и «лучевой» (рис. 1).

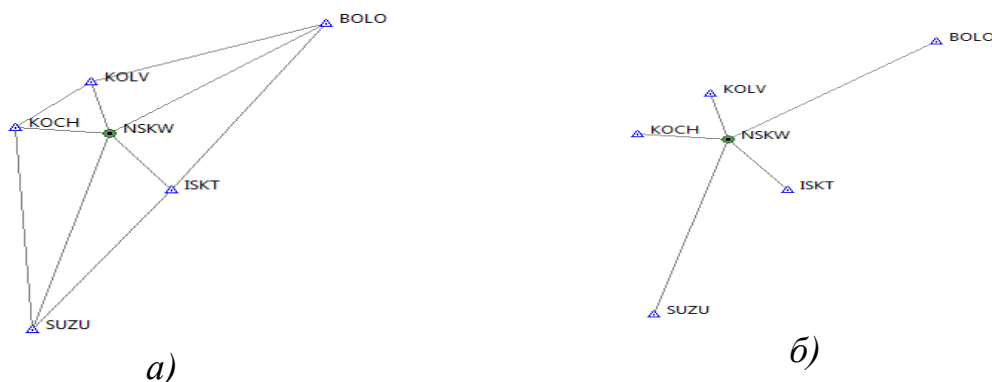


Рис. 1. Сетевой (а) и лучевой (б) варианты сгущения спутниковой сети

В работе [6] приводится утверждение о том, что при МНК-оптимизации с привязкой исходного пункта лучевым способом происходит завышенная оценка точности по сравнению с сетевым способом. В качестве подтверждения этого тезиса приводятся результаты эксперимента по МНК-оптимизации фрагмента сети в программном продукте Trimble Geomatic Office, и проводится сравнительный анализ полученных результатов. При этом сравнивая координаты исходного пункта сети, полученного из МНК-оптимизации лучевым и сетевым способом, не учитывалась коррелированность этих результатов [7].

С другой стороны, авторы настоящей статьи предполагают в дальнейшем, что пункты исходной геодезической основы в функциональной модели развиваемого геодезического построения рассматриваются как математические константы, значения которых не оптимизируются, то есть они не должны получать никаких МНК-поправок из уравнивания. В таком случае в сетевом варианте становится теоретически невозможным учет погрешностей результатов выполненных дополнительных измерений (приращений координат) между опорными пунктами («канвой») сети в процессе осуществления МНК-оптимизации. Дальнейшие рассуждения о явном формальном преимуществе сетевого способа, как более строгом и информативном относительно лучевого, – теряют смысл. Избыточность измерений позволяет, конечно, выполнять вычисления невязок в замкнутых фигурах для контроля качества, но эта дополнительная информация будет блокирована «жесткостью» координат основы и не позволит ей влиять на координаты «канвы».

Для подтверждения выдвинутых авторами тезисов было выполнено уравнивание фрагмента спутниковой сети, полученного по лучевой и сетевой технологии (см. рис. 1), с использованием алгоритма синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации данных [8].

### *Методы и материалы*

Синтезированные варианты МНК-алгоритмов по своей форме представляют собой известные комбинированные алгоритмы МНК-оптимизации данных, выраженные в виде блочных матриц [9–12]. Общая теория синтезированной версии МНК-оптимизации геопространственных данных представлена в монографии [8].

Для иллюстрации применения синтезированного алгоритма при уравнивании ГНСС-измерений авторами использованы суточные данные (приращения координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  и их ковариационная матрица  $K_{\Delta}$ ) на даты 25.12.2016 и 26.12.2016, полученные с шести пунктов сети ПДБС НСО: Болотное (BOLO), Искитим (ISKT), Коченево (KOCN), Колывань (KOLV), Сузун (SUZU) и Новосибирск (NSKW). Пункт Новосибирск (NSKW) являлся искомым, а остальные пять пунктов рассматривались как опорные, то есть безошибочные математические константы  $Z_{15 \cdot 1}$ . Практически, с этой целью их ковариационная матрица  $K_Z$  модулировалась множителем, равным  $10^{-8}$ . Уравнивание выполнялось в координатной системе отсчета ITRF2014.

Функциональная модель  $F_{15 \cdot 1}$  пространственных данных, разностей координат пунктов  $\mathcal{D}_{15 \cdot 1}$ , известна. В нашем случае она представляет собой линейную функцию, равную разности вектора истинных значений опорных координат  $Z_{15 \cdot 1}$  и повторяющихся истинных значений искомых координат  $\mathcal{X}_{3 \cdot 1}$ :

$$F_{15 \cdot 1} = \mathcal{D}_{15 \cdot 1} = Z_{15 \cdot 1} - A_{15 \cdot 3} \mathcal{X}_{3 \cdot 1}. \quad (2)$$

Матрица  $A_{15 \cdot 3}$  состоит из пяти единичных блоков  $I_{3 \cdot 3}$  и обеспечивает возможность вычитания вектора  $A_{15 \cdot 3} \mathcal{X}_{3 \cdot 1}$  из вектора  $Z_{15 \cdot 1}$ .

Стандартный переход к измеренным ( $\Delta^{\text{изм}}$ ,  $Z^{\text{изм}}$ ) и приближенным ( $X^0$ ) значениям компонентов функциональной модели (2) обеспечивает переход к соответствующим уравнениям погрешностей в неявном виде (стандартные преобразования опущены):

$$-(\delta\Delta)_{15 \cdot 1} + \delta z_{15 \cdot 1} - A_{15 \cdot 3} \delta x_{3 \cdot 1} - L_{15 \cdot 1} = 0. \quad (3)$$

### *Результаты*

Структура решения системы (3) в рамках синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации для лучевого способа представлена на рис. 2. Там же раскрываются значения всех блоков, составляющих гиперматрицу коэффициентов ( $C \mid -I \mid A$ ), гипервектор корней ( $\delta z$ ,  $\delta\Delta$ ,  $\delta x$ ) и гипервектор свободных членов  $L$ .

Лучевой способ									
$(K_Z \cdot 10^8)^{-1}$		0	0		$C^T = I$		$\delta z$		0
	15·15		15·15	15·3		15·15		15·1	15·1
0		$(K_{\Delta 1} \cdot 10^4)^{-1}$	0		$-I$		$\delta \Delta_1$		0
	15·15		15·15	15·3		15·15	*	15·1	= 15·1
0	3·15	0	3·15	$(K_X = I \cdot 10^{12})^{-1}_{33}$	$A^T$	3·15		$\delta x_{31}$	0 <sub>31</sub>
$C = I$		$-I$	$A$		0			$\lambda$	$L_1$
	15·15		15·15	15·3		15·15		15·1	15·1

$K_Z \cdot 10^8$  – блокированная ковариационная матрица опорных координат  $z$ ;  $K_{\Delta 1} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta_1$ ;  $K_X = I \cdot 10^{12}$  – априорная регуляризованная ковариационная матрица приближенных значений искомым координат  $x$  определяемого пункта;  $L$  – свободные члены линеаризованной модели (3), равные разности измеренных значений приращений  $\Delta^{\text{изм}}$  и их приближенных значений  $\Delta^{\text{пр}}$ ;  $A$  – матрица плана искомым координат  $X$ ;  $C = I$  – матрица плана опорных координат  $Z$ .

Рис. 2. Структура алгоритма синтезированного варианта МНК-оптимизации данных для лучевого способа:

Множители  $10^k$  обеспечивают одинаковую долюность единиц ковариационных матриц и свободных членов. Одновременно, они используются для регуляризации ковариационной матрицы приближенных значений координат искомого пункта  $x$ .

Отдельно взятое  $i$ -ое уравнение системы (3) раскрывает ее структуру:

$$-(V_{\Delta 1})_i + \delta z_i - \delta x_{ij} - l_i = 0. \quad (4)$$

Свободный член уравнения (4) – это разность измеренных значений приращений координат  $\Delta^{\text{изм}}$  и приближенных значений разностей  $\Delta^{\text{пр}}$ , соответствующих предварительным значениям тех же разностей.

Структура получаемых результатов приведена на рис. 3, так же сопровождаем необходимыми пояснениями.

Аналогично выглядит структура решения уравнений (3) в рамках синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации для сетевого способа, представленная на рис. 4.

Структура получаемых результатов сетевого способа приведена на рис. 5, так же сопровождается необходимыми пояснениями.

Вычисления, выполненные в электронной вычислительной таблице Excel, дали абсолютно идентичные результаты как для поправок в приближенные значения координат «вставки», так и для средних квадратических ошибок их уравненных значений. Эта информация приведена на рис. 6.

Лучевой способ										
$\delta z = 0$		$K_{Z_{ур}}$		$K_{12}$		$K_{13}$		$K_{14}$		0
15·1		15·15		15·15		15·3		15·15		15·1
$\delta \Delta_1$		$K_{21}$		$K_{2ур}$		$K_{12}$		$K_{24}$		0
15·1	=	15·15		15·15		15·3		15·15	*	15·1
$\delta x_{3·1}$		$K_{31}$		$K_{32}$		$K_{X_{ур} 3·3}$		$K_{34}$		0 <sub>3·1</sub>
$\lambda$		$K_{41}$		$K_{42}$		$K_{12}$		$-K_{\lambda}$		$L_1$
15·1		15·15		15·15		15·3		15·15		15·1

$K_{Z_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений опорных координат  $Z_{ур}$ ;  $K_{\Delta 1_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений приращений  $\Delta 1_{ур}$ ;  $K_{X_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений искомых координат  $X_{ур}$ ;  $\delta z = 0$  – МНК-поправки к опорным координатам (практически нулевые –  $< 10^{-8}$ );  $\delta \Delta_1$  – МНК-поправки к измеренным приращениям «лучей»  $\Delta_1$ ;  $\delta x$  – МНК-поправки к приближенным значениям координат  $x$ ;  $\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа.

Рис. 3. Структура результатов решения системы уравнений для лучевого способа

Сетевой способ						
$(K_Z \cdot 10^{-8})^{-1}_{15 \cdot 15}$	0	0	0	$C^T_{15 \cdot 30}$	$\delta z$	0 <sub>15·1</sub>
0	$(K_{\Delta 1} \cdot 10^4)^{-1}_{15 \cdot 15}$	0	0	$-I_{30 \cdot 30}$	$\delta \Delta_1$	0 <sub>15·1</sub>
0	0	$(K_{\Delta 2} \cdot 10^4)^{-1}_{15 \cdot 15}$	0		*	$\delta \Delta_2$
0	0	0	$(K_{X=I} \cdot 10^{12})^{-1}_{3 \cdot 3}$	$A^T_{3 \cdot 30}$	$\delta x_{3 \cdot 1}$	0 <sub>3·1</sub>
$C_{30 \cdot 15}$	$-I_{30 \cdot 30}$		$A_{30 \cdot 3}$	$O_{30 \cdot 30}$	$\lambda$	$L_1$
						$L_2$

$K_Z \cdot 10^{-8}$  – блокированная априорная ковариационная матрица опорных координат  $Z$ ;  $K_{\Delta 1} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta 1$  ("лучи");  $K_{\Delta 2} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta 2$  ("канва");  $K_{X=I} \cdot 10^{12}$  – априорная регуляризованная ковариационная матрица приближенных значений координат  $x$  определяемого пункта;  $L_1$  – свободные члены приращений «лучи»;  $L_2 = 0$  – нулевые свободные члены приращений «канва»;  $A$  – матрица плана искомых координат  $X$ ;  $C = I$  – матрица плана опорных координат  $Z$ .

Рис. 4. Структура алгоритма синтезированного варианта МНК-оптимизации данных для сетевого способа:

Сетевой способ							
$\delta z=0$		$K_{Zур}$	$K_{12}$	$K_{13}$	$K_{14}$	$K_{15}$	$0_{15;1}$
$\delta\Delta_1$		$K_{21}$	$K_{\Delta 1ур}$	$K_{23}$	$K_{24}$	$-I_{30;30}$	$0_{15;1}$
$\delta\Delta_2=0$	=	$K_{31}$	$K_{32}$	$K_{\Delta 2ур}$	$K_{34}$		*
$\delta x_{3;1}$		$K_{41}$	$K_{42}$	$K_{43}$	$K_{Xур\ 3;3}$	$A^T_{3;30}$	$0_{3;1}$
$\lambda$		$K_{51}$	$-I_{30;30}$		$A_{30;3}$	$0_{30;30}$	$L_1$
							$L_2$

$K_{Zур}$  – ковариационная матрица уравненных значений опорных координат  $Z_{ур}$ ;  $K_{\Delta 1ур}$  – ковариационная матрица уравненных значений «лучей»  $\Delta_{ур1}$ ;  $K_{\Delta 2ур}$  – ковариационная матрица уравненных значений «канвы»  $\Delta_{ур2}$ ;  $K_{Xур}$  – ковариационная матрица уравненных значений искомым координат  $X_{ур}$ ;  $\delta z = 0$  – МНК-поправки к координатам  $Z$  (практически нулевые –  $< 10^{-4}$ );  $\delta\Delta_1$  – МНК-поправки к измеренным значениям «лучей»  $\Delta_1$ ;  $\delta\Delta_2 = 0$  – МНК-поправки к приращениям «канвы»  $\Delta_2$  (практически нулевые –  $< 10^{-4}$ );  $\delta x$  – МНК-поправки к приближенным значениям искомым координат  $x$ ;  $\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа.

Рис. 5. Структура результатов решения системы уравнений для сетевого способа

"Лучевой" способ				"Сетевой" способ			
	$\delta X$	СКО			$\delta X$	СКО	
Нов_ск	0,032	0,043	см	Нов_ск	0,032	0,043	см
	0,426	0,161			0,426	0,161	
	-0,293	0,218			-0,293	0,218	

Рис. 6. Данные результатов решения задачи координирования «лучевым» и «сетевым» способами

### Заключение

МНК-оптимизация геопространственных данных, учитывающая погрешности координат опорных пунктов, теоретически блокирует влияние погрешностей измерений, выполненных между точками «жесткой канвы». По результатам проведенных численных экспериментов уравнивания фрагмента спутниковой сети ПДБС НСО, реализованных по лучевой и сетевой технологии, с использованием алгоритма синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации данных, авторами были получены абсолютно идентичные результаты как для поправок в приближенные значения координат «вставки», так и для средних

квадратических ошибок уравненных значений координат. Это говорит о возможности использования лучевого способа для привязки исходного пункта спутниковой геодезической сети, в случае, когда пункты исходной геодезической основы в функциональной модели развиваемого геодезического построения рассматриваются как математические константы, значения которых не оптимизируются.

Использование лучевого способа, вместо сетевого, для привязки исходного пункта спутниковой геодезической сети позволит сократить временные и человеческие затраты, что приведет к сокращению экономической нагрузки в процессе развития государственных геодезических сетей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федеральный закон «О геодезии, картографии и пространственных данных и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» от 30.12.2015 N 431-ФЗ (последняя редакция) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_191496/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_191496/)
2. Приказ Минэкономразвития России от 29.03.2017 № 138 «Об установлении структуры государственной геодезической сети и требований к созданию государственной геодезической сети, включая требования к геодезическим пунктам» (Зарегистрировано в Минюсте России 31.08.2017 № 48039) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_227086/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_227086/)
3. Карпик А.П., Липатников Л.А., Лагутина Е.К. О направлении развития опорной геодезической сети России как элемента единой системы координатно-временного и навигационного обеспечения // Гироскопия и навигация. – 2016. – Т. 24, № 2 (93). – С. 87 – 94.
4. Beutler G., Bauersima I., Botton S. Accuracy and biases in the geodetic application of the Global Positioning System // Manuscripta geodaetica. – 1989. – Vol. 14. – P. 28 – 35.
5. Leick, A. GPS Satellite Surveying. – New York: A Willey-Interscience Publication, 2004. – 464 p.
6. Струков А. А. Определение положения одного пункта в общеземной системе координат лучевым и сетевым способами по ГНСС-измерениям // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013. IX Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 3 т. (Новосибирск, 15–26 апреля 2013 г.). – Новосибирск : СГГА, 2013. Т. 3. – Новосибирск : СГГА, 2013. – С. 72–77.
7. Падве В.А., Косарев Н.С., Сергеев С.А. Обработка и сравнительный анализ результатов ГНСС-измерений с учетом их коррелированности // Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и геопространственное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения: сб. материалов Национальной научно-практической конференции, 14-15 декабря 2017 г., Новосибирск. В 2 ч. Ч. 1. – Новосибирск: СГУГиТ, 2018. – С. 198–205.
8. Падве, В. А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений: монография. Ч. 2: Синтезированные и комбинированные алгоритмы точностной МНК-оптимизации и анализа результатов измерений: монография. – Новосибирск: СГУГиТ, 2018. – 135 с.
9. Падве, В. А. Синтезированный алгоритм корреляционной версии МНК-оптимизации геопространственных данных // ГЕО-Сибирь-2006. Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 24–28 апреля 2006 г.). – Новосибирск : СГГА, 2006. Т. 6., ч. 6. – С. 62–64.
10. Падве, В. А. Синтезированный алгоритм параметрической версии МНК-оптимизации геопространственных данных // ГЕО-Сибирь-2008. IV Междунар. науч. конгр. : сб.



материалов в 5 т. (Новосибирск, 22–24 апреля 2008 г.). – Новосибирск : СГГА, 2008. Т. 1, ч. 2. – С. 3–5.

11. Падве, В. А. Потенциал универсального синтезированного алгоритма МНК-оптимизации геодезических данных // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – №4. – С. 34-39.

12. Падве, В. А. Показатель точности геопространственных данных // Геодезия и картография. – 2005. – № 1. – С. 18–19.

© В. А. Падве, Н. С. Косарев, 2020