УДК 550.34
DOI: 10.33764/2618-981X-2019-4-1-156-162

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Холматжон Худайназарович Имомназаров
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, тел. (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Михаил Вадимович Урев
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, тел. (383)330-83-52

Илхам Кучкарович Искандаров
Тихоокеанский государственный университет, 680035, Россия, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, старший преподаватель, тел. (4212)37-51-88

В статье рассмотрено классическое решение в полупространстве второй краевой задачи для переопределенной стационарной системы уравнений второго порядка, возникающей в двухжидкостной среде с одним давлением. Получено решение рассматриваемой краевой задачи с помощью аппарата преобразования Фурье. Показано влияние термодинамических и кинетических параметров среды на решение системы.

Ключевые слова: Двухжидкостная среда, несжимаемая жидкость, уравнение Пуассона, неоднородная задача, преобразование Фурье, классическое решение.

ON ONE PROBLEM FOR A STATIONARY SYSTEM IN A TWO-LIQUID MEDIUM IN A HALF-SPACE

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov
Institute of the Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Prospect Akademik Lavrentiev St., Novosibirsk, 630090, Russia, D. Sc., Chief Researcher, phone: (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Mikhail V. Urev
Institute of the Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Prospect Akademik Lavrentiev St., Novosibirsk, 630090, Russia, D. Sc., Leading Researcher, phone: (383)330-83-52

Ilham K. Iskandarov
Pacific State University, 136, Tihookeanskaya St., Khabarovsk, 680035, Russia, Senior Lecturer, phone: (4212)37-51-88

This paper considers a classical solution in the half-space of the second boundary value problem for an overdetermined stationary system of second order equations arising in a two-fluid medium with a single pressure. The solution of the considered boundary value problem using the Fourier transform apparatus has been obtained. The effect of thermodynamic and kinetic parameters of the medium is shown on the solution to the system in question.

Key words: two-fluid medium, incompressible fluid, Poisson's equation, inhomogeneous problem, Fourier transform, classical solution.

Введение

Многофазные многокомпонентные среды широко представлены в различных природных процессах и областях человеческой деятельности. Можно уверено сказать, что с неоднофазными смесями приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Всё это делает задачу описания и изучения таких сред одной из актуальнейших и важнейших проблем механики вообще и механики сплошных сред в частности [1-3].

Гетерогенные среды характеризует невероятное многообразие, взаимовлияние и сложность эффектов, возникающих благодаря неоднофазности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические реакции, капиллярные эффекты, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

Основная проблема математического моделирования многофазных смесей заключается в построении замкнутых уравнений движения смеси при заданных физико-химических свойствах каждой фазы в отдельности и заданной исходной структуре смеси. В стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и в обратимом приближении происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений оказывается переопределенной [4-8].

Вторая краевая задача для двухскоростной системы Стокса с одним давлением в полупространстве

В области $\Omega = R^3_+ = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 > 0 \right\}$ рассматривается вторая краевая задача для двухскоростной системы Стокса с одним давлением

$$\nu \Delta \mathrm{v} - \operatorname{grad} p = -\mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathrm{v} = 0 \text{ в } \Omega \tag{1}$$

$$\nu_1 \Delta \mathrm{u} - \operatorname{grad} p = -\mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathrm{u} = 0 \text{ в } \Omega \tag{2}$$

$$T(\mathrm{v}, p)\mathrm{n}\big|_{x_3=0} = \mathrm{a}(x_1, x_2), \qquad T(\mathrm{u}, p)\mathrm{n}\big|_{x_3=0} = \mathrm{b}(x_1, x_2), \tag{3}$$

где $\mathrm{n} = (0, 0, -1)$ обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к $S = R^2$, ν, ν_1 – кинематические коэффициенты вязкости, a, b – заданные функции, $\mathbf{f} = (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$ – массовая сила, $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$, $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$, p – неизвестные векторные поля скоростей и давление, $T(\mathrm{v}, p)$, $T(\mathrm{u}, p)$ - тензоры напряжений, соответствующие течениям v, p и u, p:

$$T(\mathrm{v}, p) = -pI + \nu S(\mathrm{v}), \qquad S(\mathrm{v}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1,2,3},$$

$$T(\mathrm{u}, p) = -pI + \nu_1 S(\mathrm{u}), \qquad S(\mathrm{u}) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1,2,3}.$$

Здесь I – единичная матрица, $S(\mathrm{v})$, $S(\mathrm{u})$ – удвоенные тензоры скоростей деформации.

Сначала рассмотрим в Ω однородную задачу ($\mathbf{f} = 0$) для системы (1)-(3) предполагая, что функции $a_m(x_1, x_2)$ и $b_m(x_1, x_2)$, (m=1,2,3) являются гладкими и достаточно быстро убывают при $\|(x_1, x_2)| \to \infty$. Решение при этом также должно убывать на бесконечности. Решение полученной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: сначала решается задача Стокса для (v, p) [9-23], а затем определяется вторая скорость u как соленоидальное решение краевой задачи для векторного уравнения Пуассона.

Обозначим через $\tilde{\mathrm{g}}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ преобразование Фурье функции $\mathrm{g}(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2 [9-11]:

$$\tilde{\mathrm{g}}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = F(g) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^2} \mathrm{g}(x_1, x_2, x_3) e^{-i\alpha_1 x_1 - i\alpha_2 x_2} dx_1 dx_2 .$$

После применения к системе Стокса преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 получим для преобразованных функций $\tilde{v}_k$, $\tilde{p}$ краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси (0, ∞) с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\nu |\alpha|^2 \tilde{v}_j - \nu \frac{d^2 \tilde{v}_j}{dx_3^2} + i\alpha_j \tilde{p} = 0, \quad j = 1,2,$$

$$\nu |\alpha|^2 \tilde{v}_3 - \nu \frac{d^2 \tilde{v}_3}{dx_3^2} + \frac{d\tilde{p}}{dx_3} = 0, \tag{4}$$

$$i\alpha_1 \tilde{v}_1 + i\alpha_2 \tilde{v}_2 + \frac{d\tilde{v}_3}{dx_3} = 0,$$

$$\nu \left(\frac{d\tilde{v}_j}{dx_3} + i\alpha_j \tilde{v}_3 \right) \Bigg|_{x_3=0} = -a_j, \quad j = 1,2,$$

$$\left(2\nu \frac{d\tilde{v}_3}{dx_3} - \tilde{p} \right) \Bigg|_{x_3=0} = -a_3, \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \to 0 \quad \text{при} \quad x_3 \to \infty .$$

Общее решение системы уравнений (4), (5) стремящееся к нулю при $x_3 \to \infty$ имеет следующий вид:

$$\tilde{v}_1(\alpha, x_3) = \left(\frac{\alpha_2}{|\alpha|} C_1 - \frac{i\alpha_1}{|\alpha|} C_2 + \frac{i\alpha_1}{2\nu|\alpha|} \left(\frac{1}{|\alpha|} - x_3 \right) C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3} \ ,$$

$$\tilde{v}_2(\alpha, x_3) = \left(-\frac{\alpha_1}{|\alpha|} C_1 - \frac{i\alpha_2}{|\alpha|} C_2 + \frac{i\alpha_2}{2\nu|\alpha|} \left(\frac{1}{|\alpha|} - x_3 \right) C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},$$

$$\tilde{v}_3(\alpha, x_3) = \left(C_2 + \frac{1}{2\nu|} x_3 C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},$$

$$\tilde{p}(\alpha, x_3) = C_3 e^{-|\alpha| x_3}.$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий (5). Решение задачи Стокса можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{a}_1 \tilde{v}_1 - \tilde{a}_2 \tilde{v}_2 - \tilde{a}_3 \tilde{v}_3, \qquad \tilde{p} = -\tilde{a}_1 \tilde{p}_1 - \tilde{a}_2 \tilde{p}_2 - \tilde{a}_3 \tilde{p}_3,$$

где $\tilde{v}_1$, $\tilde{p}_1$ - решение системы Стокса с соответствующими константами удовлетворяющее граничным условиям (5).

Исходное решение получается после выполнении обратного преобразования Фурье:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2\pi} \left[a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + a_3 * v_3 \right], \qquad p = -\frac{1}{2\pi} \left[a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + a_3 * p_3 \right],$$

где $(\mathrm{f} * \mathrm{g})(\mathbf{x})$ - свертка функций f и g. В частности функции $v_k^3(\mathbf{x})$, $p^3(\mathbf{x})$ определяются по формулам

$$v_1^3(\mathbf{x}) = \frac{-x_1 x_3}{2\nu \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{3/2}}, \quad v_2^3(\mathbf{x}) = \frac{-x_2 x_3}{2\nu \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{3/2}},$$

$$v_3^3(\mathbf{x}) = -\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2}{2\nu \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{3/2}}, \quad p^3(\mathbf{x}) = -\frac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{3/2}}.$$

Перейдем к задачи для уравнение Пуассона. Решение u будем искать в виде $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$. Продолжим соленоидальную функцию ∇p с Ω на все пространство R^3 с сохранением соленоидальности и гладкости. Такое продолжение возможно, см., например, [11, лемма 4]. Полагая

$$\mathbf{z} = -\frac{1}{4\pi\nu_1}\int_{R^3}\frac{\nabla p(\mathbf{y})}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|}\mathrm{d}\mathbf{y}$$

мы, очевидно, получим соленоидальное решение векторного уравнения Пуассона.

Функция $\mathbf{w} = (\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3)$ должна быть соленоидальной и удовлетворять векторному уравнению Лапласа с измененными по сравнению с (3) граничными условиями

$$\Delta\mathbf{w} = 0, \quad div\mathbf{w} = 0, \quad \text{в } R^3_+,$$

$$\nu_1\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0} = -d_j(x_1, x_2), \qquad j = 1,2, \tag{6}$$

$$\left(2\nu_1\frac{\partial w_3}{\partial x_3} - p\right)\bigg|_{x_3=0} = -d_3(x_1, x_2),$$

где

$$d_j(x_1, x_2) = b_j(x_1, x_2) + \nu_1\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_3} + \frac{\partial z_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0}, \qquad j = 1,2,$$

$$d_3(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2) + \nu_1\frac{\partial z_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}.$$

После применения к системе (6) преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 получим для преобразованных функций $\tilde{w}_k$ краевую задачу для переопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси $(0, \infty)$ с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Решая полученное краевую задачу и используя обратное преобразование F^{-1} после несложных преобразований получим

$$w_1(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\,\alpha\,|}e^{-|\alpha|x_3}\right]*\left(p|_{x_3=0} - d_3\right) + \frac{1}{\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\,\alpha\,|}e^{-|\alpha|x_3}\right]*d_1,$$

$$w_2(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{|\,\alpha\,|}e^{-|\alpha|x_3}\right]*\left(p|_{x_3=0} - d_3\right) + \frac{1}{\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\,\alpha\,|}e^{-|\alpha|x_3}\right]*d_2,$$

$$w_3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{1}{|\,\alpha\,|}e^{-|\alpha|x_3}\right]*\left(p|_{x_3=0} - d_3\right).$$

Переопределенность задачи (2.13) приводит к необходимому условию ее разрешимости в виде требования выполнения

$$iF^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\right]*d_1+iF^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{|\alpha|}\right]*d_2+p|_{x_3=0}-d_3=0$$

для компонент вектора $\mathbf{d}$.

Заключение

Получено классическое решение второй краевой задачи в полупространстве для переопределенной стационарной системы уравнений второго порядка, возникающей в двухжидкостной среде с одним давлением с помощью аппарата преобразования Фурье. Показано влияние термодинамических и кинетических параметров среды на решение системы.

Работа выполнена при поддержке НИР (проект № 0315-2016-0005) и при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-51-41002).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика, 1987, № 6, с. 108-117.

2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, № 9, с. 56-64.

3. Джураев Д., Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тезисы республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа", 26-27 ноября 2015 г., Бухара, с. 197-198.

4. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, с. 60-66.

5. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012. 212 с.

6. Жураев Д.А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде // УзбМЖ, 2016, No.3, с. 58-69.

7. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, No 4. С. 425-437.

8. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростова-на-Дону, 2014, с. 166-169.

9. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН СССР. 1964. Т. 70. С. 213-317.

10. Солонников В.А. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 178-254.

11. Солонников В.А. Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гельдеру производными по пространственным переменным // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 254-279.

12. Бондарь Л.Н. Разрешимость второй краевой задачи для системы Стокса // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, No 3. С. 26-39.

13. Amrouche C., Girault V. Problemes generalises de Stokes // Portugaliae Mathematica, 1992, v. 49, pp. 463-503.

14. Borchers W., Miyakawa T. L^2 -decay for Navier-Stokes flows in unbounded domains, with applications to exterior stationary flows // Arch. Rat. Mech. Anal., 1992, v. 118, pp. 273-295.

15 Borchers W., Sohr H. On the semigroup of the Stokes operator for exterior domains in L^q spaces // Math. Z, 1987, v.196, pp. 415---425.

16. Finn R. On the exterior stationary problem of the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems // Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, v.19, pp. 363-406.

17. Galdi G.P., Simader C.G., Existence, uniqueness and L^q --estimates for the Stokes problem in an exterior domain // Arch. Rat. Mech. Anal, 1990, v. 112, pp. 291-318.

18. Giga Y. Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^q spaces // Zeitschrift 1981, pp. 297-329.

19. Giga Y., Sohr H. On the Stokes operator in exterior domains // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 1989, v. 36, pp. 103-130.

20. Girault V. The gradient, divergence, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of R^3 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 1992, v. 39, No. 2, pp. 279-307.

21. Girault V., Sequeira A. A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions // Arch. Rat. Mech. and Anal, 1991, v. 114, pp. 313-333.

22. Girault V., Giroire J., Sequeira A. A stream function-vorticity variational formulation for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces, Math. Meth. in App. Sci., 15 (1992), 345-363.

23. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1985.