УДК 517.958
DOI: 10.33764/2618-981X-2019-4-1-149-155

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПОРОУПРУГОСТИ

Холматжон Худайназарович Имомназаров
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, тел. (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Равшанбек Кадамбаевич Юсупов
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, 742000, Россия, г. Нукус, ул. Академика Ч. Абдирова, 1, старший преподаватель, тел. (99861)223-60-47

Илхам Кучкарович Искандаров
Тихоокеанский государственный университет, 680035, Россия, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, старший преподаватель, тел. (4212)37-51-88

В статье изучается класс дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + g(u_t)$, с произвольными функциями $f(u_x)$ и $g(u_t)$, с помощью групповой классификации. Главная алгебра Ли бесконечно инфинитезимальных симметрий является трехмерной. Используется метод предварительной групповой классификации для получения классификаций данных уравнений относительно одномерному расширению главной алгебры Ли.

Ключевые слова: пористая среда, проницаемость, нелинейное уравнение, скорость смещений, инфинитезимальный оператор, алгебра Ли.

GROUP PROPERTIES OF A ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR POROELASTICITY EQUATION

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov
Institute of the Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Prospect Akademik Lavrentiev St., Novosibirsk, 630090, Russia, D. Sc., Leading Researcher, phone: (383)330-83-52, e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Ravshanbek K. Yusupov
Karakalpak State University named after Berdakh, 1, Academician Ch. Abdirov St., Nukus, 742000, Russia, Senior Lecturer, phone: (99861)223-60-47

Ilham K. Iskandarov
Pacific State University, 136, Tihookeanskaya St., Khabarovsk, 680035, Russia, Senior Lecturer, phone: (4212)37-51-88

This paper studies a class of partial differential equations of second order $u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + g(u_t)$, with arbitrary functions $f(u_x)$ and $g(u_t)$, with the help of the group classification. The main Lie algebra of infinitely infinitesimal symmetries is three-dimensional. We use the method of preliminary group classification for obtaining the classifications of these equations for a one-dimensional extension of the main Lie algebra.

Key words: porous medium, permeability, nonlinear equation, displacement rate, infinitesimal operator, Lie algebra.

Введение

Присутствие воды и газа в подземных резервуарах приводит к фазовым сдвигам и зависимости от частоты изменения амплитуды сейсмических волн (например, [1, 2]). В работах [3-13] ввели двухфазную модель среды для описания взаимосвязанного распространения волн в пористой флюидонасыщенной среде. Большое внимание уделяется также моделям диссипации насыщенной жидкостью пористой среды и способам ее учета в уравнениях состояния.

Фундаментальное свойство упруго-деформируемой насыщенной жидкостью пористой среды, следующее из теории пороупругости, состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна.

В [14], диффузионный подход предложен для одномерной однородной модели пористых сред. По сравнению с [14], были внесены важные улучшения: хорошее представление вязкой диссипации во всем диапазоне частот; оптимизация модели; оценка вычислительных усилий с точки зрения требуемой точности.

В [15] получена замкнутая одномерная система динамических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент скоростей вектора смещений упругого пористого тела, насыщающей жидкости и тензора напряжений в диссипативном приближении обусловленной коэффициентом проницаемости. Предложенная математическая модель является термодинамически согласованной и удовлетворяет первым физическим принципам. Показана зависимость дисперсионного соотношения полученной системы от физических и кинетических параметров.

Одномерное динамическое уравнение пороупругости для поперечных волн в диссипативном приближении

Рассмотрим распространение нелинейных поперечных сейсмических волн в случае, когда парциальная плотность пористой матрицы для простоты считаем равной единицы, а модуль сдвига μ являются функцией скорости деформации, а сила трения, определяющая диссипацию энергии, является функцией только скорости фаз. При таких предположениях нелинейное одномерное уравнение пороупругости может быть записано в следующем виде [16, 17]:

$$u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + g(u_t), \tag{1}$$

где u - скорости пористой матрицы, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ - операторы дифференцирования.

Уравнение типа (1) возникает при изучении одномерной динамической системы уравнений для пороупругости волн SH в случае низкой пористости и низкой проницаемости [16, 18]. Функция g связана с проницаемостью пористой среды и отвечает за рассеяние энергии, а функция f отвечает за скорость распространения поперечной волны. Скорость насыщающей жидкости v определяется через функции u явным образом [17].

Инвариантны преобразования и принцип алгебры Ли

Следуя [19], для уравнения (1) запишем условие инвариантности

$$\underset{2}{X}\left[u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + g(u_t)\right]\Big|_{(1)} = 0, \tag{2}$$

где $\underset{2}{X}$ - второе продолжение инфинитезимального оператора

$$X = \xi_1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{3}$$

получены следующие формулы пролонгации:

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{4}$$

а координаты продолженного оператора $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{11}, \zeta_{22}$ в расширенном пространстве определяются известными формулами [20, 21].

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем следующее определяющее уравнение:

$$\left[\zeta_{11} - f\zeta_{22} - u_{xx}\zeta_2 f_{u_x} - \zeta_1 g_{u_t}\right]\Big|_{(1)} = 0.$$

Отсюда в силу произвольности функций f и g получим

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0, \qquad \zeta_{11} = 0, \qquad \zeta_{22} = 0$$

или

$$(\xi_k)_t = (\xi_k)_x = (\xi_k)_u = 0, \quad k = 1,2, \qquad \eta_t = \eta_x = \eta_u = 0.$$

Из этих соотношений после несложных преобразований получим

$$\xi_k = c_k, \quad k = 1,2, \qquad \eta = c_3.$$

Следовательно, для произвольных функций f и g уравнение (1) допускает трехмерную алгебру Ли L_3 с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Следуя [19], будем называть L_3 главной алгеброй Ли для уравнения (1). Оставшаяся часть групповой классификации должна указывать коэффициенты f и g такие, что уравнение (1) допускает расширение главной алгебры L_3. С этой целью для удобства введем новые обозначения $f^1 = f$ и $f^2 = g$.

Преобразование эквивалентности является невырожденным замена переменных t, x, u принимая любое уравнение вида (1) в уравнение той же формы, вообще говоря, с разными $f(u_x)$ и $g(u_t)$. Множество всех эквивалентностей преобразования образуют группу эквивалентности E. Следуя [20], мы должны найти непрерывную подгруппу E_c, использующую бесконечно инфинитезимальный метод. Оператор группы E_c принимает вид

$$Y = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \mu^1 \frac{\partial}{\partial f^1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial f^2} = X + \mu^1 \frac{\partial}{\partial f^1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial f^2},$$

где X определена формулой (3). Зависимости f^k и μ^k таковы: $f^k = f^k(t,x,u,u_t,u_x)$ и $\mu^k = \mu^k(t,x,u,u_t,u_x,f^1,f^2)$. Уравнение (1) запишется в виде следующей системы:

$$u_{tt} - f^1(u_x)u_{xx} - f^2(u_t) = 0, \tag{5}$$

$$f_t^k = f_x^k = f_u^k = 0, \qquad k = 1,2, \quad f_{u_t}^k = 0, \quad f_{u_x}^k = 0. \tag{6}$$

Условия инвариантности для данной системы имеют вид

$$\underset{2}{Y} = Y + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} +$$

$$+\omega_2^k \frac{\partial}{\partial f_x^k} + \omega_1^k \frac{\partial}{\partial f_t^k} + \omega_0^k \frac{\partial}{\partial f_0^k} + \omega_{01}^1 \frac{\partial}{\partial f_{u_t}^k} + \omega_{10}^1 \frac{\partial}{\partial f_{u_x}^k}. \tag{7}$$

Здесь коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{11}, \zeta_{22}$ оператора (4) и другие коэффициенты (7) получаются путем применения процедуры продолжения до дифференциальных переменных f^k с независимыми переменными (t,x,u,u_t,u_x).

После простых преобразований получим следующие формулы продолжения:

$$\omega_0^k = \left(\mu^k\right)_u - f_{u_t}^k\left(\xi_1\right)_u - f_{u_x}^k\left(\xi_2\right)_u, \quad \omega_1^k = \left(\mu^k\right)_t - f_{u_t}^k\left(\zeta_1\right)_t - f_{u_x}^k\left(\zeta_2\right)_t,$$

$$\omega_2^k = \left(\mu^k\right)_x - f_{u_t}^k\left(\zeta_1\right)_x - f_{u_x}^k\left(\zeta_2\right)_x, \qquad \omega_{01}^1 = \left(\mu^1\right)_{u_t} - f_{u_x}^1\left(\left(\zeta_2\right)_{u_t} + f_{u_t}^2\left(\zeta_2\right)_{f^2}\right),$$

$$\omega_{10}^1 = \left(\mu^1\right)_{u_x} - f_{u_x}^1\left(\left(\zeta_2\right)_{u_x} + f_{u_x}^1\left(\zeta_2\right)_{f^1}\right).$$

Отсюда с учетом условия инвариантности (6) получим

$$\omega_j^k = 0, \ (\mathrm{k}=1,2,\ \mathrm{j}=0,1,2), \quad \omega_{01}^1 = 0, \quad \omega_{10}^1 = 0,$$

Поскольку эти соотношения должны выполняться для любых f^1 и f^2, получим:

$$\left(\zeta_1\right)_t = 0, \quad \left(\zeta_2\right)_t = 0, \quad \left(\zeta_1\right)_x = 0, \quad \left(\zeta_2\right)_x = 0,$$

$$\left(\zeta_1\right)_u = 0, \quad \left(\zeta_2\right)_u = 0, \quad \left(\zeta_1\right)_{u_x} = 0, \quad \left(\zeta_2\right)_{u_t} = 0,$$

$$\left(\mu^k\right)_t = \left(\mu^k\right)_x = \left(\mu^k\right)_u = 0, \quad \left(\mu^1\right)_{u_t} = 0, \quad \left(\mu^2\right)_{u_x} = 0.$$

После несложных вычислений получим

$$\xi_1 = \xi_1(t), \quad \xi_2 = \xi_2(x), \quad \mu^1 = \mu^1\left(u_x, f^1, f^2\right), \quad \mu^2 = \mu^2\left(u_t, f^1, f^2\right),$$

$$\eta = c_1 u + c_2 x + c_3 t + c_4, \quad c_m = const, \quad m = 1,2,3,4,$$

Остальное условие инвариантности для (1) с учетом (7) можно записать в виде

$$\zeta_{11} - f^1 \zeta_{22} - \mu^1 u_{xx} - \mu^2 = 0.$$

Отсюда с учетом уравнения (1) получим

$$-\left(\xi_1\right)'' u_t + \left[\left(2c_1 - 3\left(\xi_1\right)'\right) f^1 - \mu^1 - \left(2c_1 - 3\left(\xi_2\right)'\right) f^1\right] u_{xx} +$$

$$+\left(2c_1 - 3\left(\xi_1\right)'\right) f^2 + \left(\xi_2\right)'' u_x f^1 - \mu^2 = 0.$$

Так как в этом соотношение величины u, u_t, u_x и u_{xx} являются независимыми переменными. Имеем

$$\eta = c_1 u + c_2 x + c_3 t + c_4, \qquad \xi_1 = c_5 t + c_6, \qquad \xi_2 = \psi(x),$$

$$\mu^1 = 3\left(\psi' - c_5\right) f^1, \qquad \mu^2 = \left[2c_1 - 3c_5\right] f^2 + \psi'' u_x f^1,$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные и ψ – произвольная функция.

Заключение

Изучен класс дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + g(u_t)$ возникающей в теории пороупругости. Произвольные функции $f(u_x)$ и $g(u_t)$ соответствуют скорости распространения сдвиговых волн и диссипацию энергии обусловленной проницаемости среды, соответственно. Показано, что алгебра Ли бесконечно инфинитезимальных симметрий является трехмерной. Также проведен групповой анализ данного класса уравнений на основе метода предварительного группового классификация.

Работа выполнена при поддержке НИР (проект № 0315-2016-0005) и гранта МОН РК №AP05131026.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Castagna J. P., Sun S., Wu S.R. Instantaneous spectral analysis: detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons // The Leading Edge, 2003, v. 22, pp. 120–127.

2. Korneev V.A., Goloshubin G.M., Daley T.V., Silin D.B. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs // Geophysics, 2004, v. 69, pp. 522–532.

3. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8, №4. С. 133–150.

4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28. pp. 168–178.

5 Biot, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II: High-frequency range // J. Acoust. Soc. America, 1956, Vol. 28, pp. 179–191.

6. Fellah, Z.E., Chapelon, J.Y., Berger, S., Lauriks, W., and C.D.Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone: application of Biot theory // J. Acoust. Soc. Am., 2004, No. 116, pp. 61–73.

7. Carcione, J. M. Computational poroelasticity - A review // Geophysics 2010, v. 75, pp. 75A229–75A243.

8. Chiavassa, G. and Lombard, B. Time domain numerical modeling of wave propagation in 2D heterogeneous porous media // J. Comp. Phys. 2011, v. 230, pp. 5288–5309.

9. Lu, J. F. and Hanyga, A. Wave field simulation for heterogeneous porous media with singular memory drag force // J. Comp. Phys. 2005, v. 208, pp. 651–674.

10. Haddar, H., Li, J. R., and Matignon, D. Efficient solution of a wave equation with fractional-order dissipative terms // J. Comp. Appl. Math. 2010, v. 234, pp. 2003–2010.

11. Blanc, E., Chiavassa, G., and Lombard, B. Biot-JKD model: simulation of 1D transient poroelastic waves with fractional derivatives // J. Comput. Phys. 2012, v. 237, pp. 1–20.

12. Gautier, G., Groby, J. P., Dazel, O., Kelders, L., De Rick, L., and Leclaire, P. Propagation of acoustic waves in a one-dimensional macroscopically inhomogeneous poroelastic material // J. Acoust. Soc. America, 2011, v. 130, pp.1390–1398.

13. Coussy, O. Mechanics of Porous Continua, John Wiley and Sons, 1995.

14. Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // J. Fluid Mech., 1987, v. 176, pp. 379–402.

15. Имомназаров Х. Х., Юсупов Р. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении динамической теории пороупругости // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XIV Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 23–27 апреля 2018 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. Т. 2. – С. 104–111.

16. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В., Холмуродов А.Э. Прямая и обратная задача для нелинейных одномерных уравнений пороупругости // Доклады Академии Наук, 2014, том 455, № 6, С. 640-642.

17. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.

18. Yangiboev Z. The first Darboux problem for second order hyperbolic equations with memory // Mathematical Modeling in Geophysics. — 2015. — No. 18. — pp. 49-52.

19. Ibragimov N.H. Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. 1991, v. 32, No. 11, pp. 2988-2995.

20. Ovsiannikov L.V. Group Analysis of Dzrerential Equations, Academic, New York, 1982.

21. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Reidel, Dordrecht, 1985.