УДК 517.968
DOI: 10.33764/2618-981X-2019-2-3-116-121

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ НА КОНУСАХ

Акбар Хасанович Бегматов
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, тел. (383)343-25-77, e-mail: begah@ngs.ru

В работе рассматривается задача определения внутренней структуры трехмерного объекта по интегральным данным, полученным при томографическом сканировании по конусной схеме на прямых круговых конусах. Доказаны оценки устойчивости и получена формула обращения.

Ключевые слова: томография, интегральная геометрия, интегральные уравнения, некорректные задачи, формула обращения, оценки устойчивости.

RESTORATION OF THE INNER STYRUCTURE OF AN OBJECT FROM INTEGRAL DATA ON CONES

Akbar H. Begmatov
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, D. Sc., Professor at the Department of Higher Mathematics, phone: (383)343-25-77, e-mail: begah@ngs.ru

We consider the problem of determining the internal structure of the three-dimensional object from integral data obtained by tomografic scanning using a cone scheme over a family of right circular cones. Stability estimates are proven and inversion formula is obtained.

Key words: tomography, integral geometry, integral equations, ill-posed problems, inversion formula, stability estimates.

Введение и постановка задачи

Проблема реконструкции объекта или среды по их проекциям имеет большое значение в ряде областей науки. Наиболее важный практический аспект этой проблемы связан с возможностью получения информации о распределении плотности среды внутри исследуемого объекта по его наблюдаемым интегральным данным. Такие процессы изучаются в реконструктивной и компьютерной томографии [1].

Рассмотрим задачу определения внутренней структуры трехмерного объекта по интегральным данным, полученным при томографическом сканировании среды с использованием конусной схемы на прямых круговых конусах [2, 3]. Математическая модель задачи позволяет использовать развитые методы интегральной геометрии [4, 5].

Введем обозначения:

$$x=(x_1,x_2)\in R^2,\ \xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^2,\ y\in R^1,\ \eta\in R^1;$$

$$L_H=\left\{(x_1;x_2;y):(x_1,x_2)\in R^2, 0\le\eta\le y\le H, H<\infty\right\}.$$

Сформулируем математическую модель задачи: восстановить функцию $u(x,y)$ в области L_H, если известны интегралы от нее по конусам семейства $\{K(x,y)\}$ с весовой функцией $g(x,y)$:

$$\int\limits_{K(x,y)} g(x,\xi)u(\xi,\eta)d\xi=f(x,y) \tag{1}$$

где $K(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=y-\eta,\ 0\le\eta\le y\le H\right\}$.

Задача решения уравнения (1) представляет собой задачу интегральной геометрии вольтерровского типа [6, 7].

Основные преобразования

Пусть весовая функция $g(x,\xi)=\dfrac{1}{|x-\xi|}$, тогда из (1) получаем

$$f(x,y)=\iint\limits_{K(x,y)}\frac{1}{y-\eta}u(\xi,\eta)dS. \tag{2}$$

Уравнение (2) запишем следующим образом:

$$\int\limits_0^y\left[\int\limits_0^{2\pi}u\big(x_1+(y-\eta)\cos\alpha,x_2+(y-\eta)\sin\alpha,\eta\big)d\alpha\right]d\eta=f_1(x,y), \tag{3}$$

где $f_1(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f(x,y)$. Применим к уравнению (3) преобразование Фурье по переменной (x_1,x_2). Сделав замену $t_1=x_1+(y-\eta)\cos\alpha, \mathrm{t}_2=x_2+(y-\eta)\sin\alpha$, получим

$$\hat{f}_1(\lambda_1,\lambda_2,y)=\int\limits_0^y\int\limits_0^{2\pi}e^{-i(y-\eta)(\lambda_1\cos\alpha+\lambda_2\sin\alpha)}\hat{u}(\lambda_1,\lambda_2,\eta)\,d\alpha d\eta=$$

$$=\int\limits_0^y\hat{u}(\lambda_1,\lambda_2,\eta)\left[\int\limits_0^{2\pi}e^{-i(y-\eta)(\lambda_1\cos\alpha+\lambda_2\sin\alpha)}d\alpha\right]d\eta. \tag{4}$$

Здесь $\overset{\wedge}{f_1}(\lambda_1,\lambda_2,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}f_1(x,y)dx_1dx_2$ - образ Фурье по переменным (x_1,x_2) функции $f_1(x,y)$. Уравнение (4) приведем к виду

$$\overset{\wedge}{f_1}(\lambda_1,\lambda_2,y)=\int\limits_0^y\hat{u}(\lambda_1,\lambda_2,\eta)I_0(\lambda_1,\lambda_2\rho)d\eta \qquad (5)$$

где

$$I_0(\lambda,\rho)=\int\limits_0^{2\pi}e^{-i(y-\eta)(\lambda_1\cos\alpha+\lambda_2\sin\alpha)}d\alpha. \qquad (6)$$

Пусть $\lambda=|\lambda|\beta$, где $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ – двумерный единичный вектор. Вектор β можно выбрать совпадающим по направлению с α_1. Тогда интеграл (6) без потери общности можно записать в виде

$$I_0(\rho,\lambda)=2\int\limits_{-1}^{1}e^{i\rho|\lambda|\alpha_1}\left(1-\alpha_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\alpha_1,$$

где $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$. Используя интегральное представление цилиндрических функций, получим

$$I_0(\rho,\lambda)=2\pi J_0(|\lambda|\rho). \qquad (7)$$

Единственность решения

Покажем, что дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция $u(x,y)$ однозначно восстанавливается по правой части уравнения (1), заданной для всех значений (x,y) из L_H.

С помощью (7) уравнение (5) может быть представлено в виде

$$\overset{\wedge}{f_1}(\lambda,y)=2\pi\int\limits_0^y(y-\eta)^{-k+1}J_0((y-\eta)|\lambda|)\hat{u}(\lambda,\eta)d\eta. \qquad (8)$$

Обозначим $\varphi(\lambda,p)=2\pi\int\limits_0^\infty e^{-py}\hat{f}_1(\lambda,y)dy$, $\upsilon(\lambda,p)=\int\limits_0^\infty e^{-p\eta}\hat{u}(\lambda,\eta)d\eta$. Применяя к обеим частям уравнения (8) преобразование Лапласа по переменной y, получим

$$\varphi(\lambda,p)=\int_0^\infty e^{-py}\left[2\pi\int_0^y (y-\eta)^{-k+1}J_0\left((y-\eta)|\lambda|\right)\hat{u}(\lambda,\eta)\,d\eta\right]dy=$$

$$=2\pi\int_0^\infty\left[\int_\eta^\infty e^{-py}(y-\eta)^{-k+1}J_0\left((y-\eta)|\lambda|\right)dy\right]\hat{u}(\lambda,\eta)\,d\eta\,.$$

Сделав замену $\rho = y-\eta$, запишем

$$\varphi(\lambda,p)=2\pi\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-p(\tau+\eta)}\tau^{-k+1}J_0\left(|\lambda|\tau\right)d\tau\right]\hat{u}(\lambda,\eta)\,d\eta=$$

$$=2\pi\int_0^\infty e^{-p\eta}\hat{u}(\lambda,\eta)\,d\eta\int_0^\infty e^{-p\tau}\tau^{-k+1}J_0\left(|\lambda|\tau\right)d\tau\,.$$

Итак, мы свели исходную задачу к задаче решения уравнения

$$2\pi\cdot I_1(\lambda,p)\upsilon(\lambda,p)=\varphi(\lambda,p), \tag{9}$$

где $I_1(\lambda,\mathrm{p})=2\pi\int_0^\infty e^{-p\tau}J_0\left(\tau|\lambda|\right)d\tau$, $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Используя формулу (6.611) из [8], получим выражение для последнего интеграла:

$$I_1(\lambda,\mathrm{p})=2\pi\frac{1}{\sqrt{p^2+|\lambda|^2}}\,. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) единственно, если $\upsilon(\lambda,p)$ и $\varphi(\lambda,p)$ являются образами Фурье-Лапласа дважды непрерывно дифференцируемых функций. Отсюда, в силу известных свойств обратных преобразований Фурье и Лапласа, следует единственность решения уравнения (1) в указанном классе функций.

Оценки устойчивости и формула обращения

Из (9) и (10) следует, что

$$\upsilon(\lambda,p)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{p^2+|\lambda|^2}\,\varphi(\lambda,p). \tag{11}$$

Подействуем на обе части уравнения (11) обратным преобразованием Лапласа по переменной p. Используя теорему умножения, свойство дифференцирования преобразования Лапласа, а также формулу (10), имеем

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^y \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + |\lambda|^2 \right) \hat{f}(\lambda, \eta) J_0\left(|\lambda|(y-\eta)\right) d\eta . \tag{12}$$

Теперь применим к обеим частям уравнения (12) обратное преобразование Фурье по переменой λ. Используя теорему о свертке и свойства преобразований Фурье, получим следующее представление решения уравнения

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^y \int_{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Delta_\xi \right) \left(E - \Delta_\xi\right) f(\xi, \eta) \varphi_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta , \tag{13}$$

где $\Delta_\xi = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi_1{}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \xi_2{}^2}$.

Из (11) следует неравенство $\upsilon(\lambda, p) \le \dfrac{1}{2\pi}\left(1 + p + |\lambda|\right)\varphi(\lambda, p)$. Таким образом, верна оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left|\upsilon(\lambda, p)\right|^2 dp d\lambda \le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left| \frac{1}{2\pi}\left(1 + p + |\lambda|\right)\varphi(\lambda, p) \right|^2 dp d\lambda . \tag{14}$$

Используя свойства дифференцирования преобразования Лапласа и Фурье, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (13), (14) и условия, наложенные на функцию u, получим оценку устойчивости решения

$$\left\| u(x, y) \right\|_{W_2^{0,0,1}(\Omega)} \le \frac{1}{2\pi} \left\| f(x, y) \right\|_{W_2^{3,3,3}(\Omega)} .$$

Заключение

В работе исследованы вопросы единственности и существования решения новой математической модели задачи реконструктивной томографии. Отметим, что весовая функция оператора интегральной геометрии в работе отлична от постоянной, что улучшает точность представления основных характеристик исследуемой среды (объекта).

Получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Такая формула обращения в совокупности с представленными в статье оценками решения задачи в пространствах конечной гладкости позволяет разработать алгоритм устойчивого решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. – Stuttgart: B.G. Teubner, 1986. – 222 p.

2. Begmatov A. H. Inversion of X-ray Transforms with Incomplete Data in n-Dimensional Space // IFOST 2016. International forum on strategic technology: proceedings of the conf. Part 3 (Novosibirsk, Russia, 1–3 June 2016). – Novosibirsk, NSTU, 2016. – P. 99–101.

3. Begmatov A.H., Djaykov G.M. Numerical Recovery of Function in a Strip from Given Integral Data on Linear Manifolds // IFOST 2016. International forum on strategic technology: proceedings of the conf. Part 3 (Novosibirsk, Russia, 1–3 June 2016). – Novosibirsk, NSTU, 2016. – P. 478–483.

4. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. О восстановлении функции по сферическим средним // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2013. – №1. – С. 6-15.

5. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением // Владикавказский математический журнал. – 2015. – № 3 (17). – С. 14-22.

6. Begmatov A.H. Volterra-type integral geometry problems // IMSE98. Integral Methods in Science and Engineering: Proceedings of the conf. (Houghton, USA, 10–13 August 1998). – Houghton, USA: Addison Wesley Longman, 1998. – P. 46-50.

7. Бегматов А.Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Доклады Академии Наук. – 2009. – № 4 (427). – С. 439-441.

8. Градщтейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.