

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИКИ ВАССЕРШТЕЙНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

*Алексей Александрович Василенко*

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1, студент, e-mail: alexvas1996@ya.ru

Обратная динамическая задача сейсмики заключается в определении скоростной модели упругой среды по зарегистрированным данным. В данной работе предлагается использовать метрику Вассерштейна для построения функционала, характеризующего разницу между синтетическими и зарегистрированными данными. Её применение уменьшает количество локальных экстремумов в сравнении с  $L_2$ -нормой.

Приводятся и обсуждаются результаты численных экспериментов, в том числе проводится сравнительный анализ восстановленных с использованием метрики Вассерштейна и  $L_2$ -нормы скоростных моделей.

**Ключевые слова:** сейсморазведка, обработка сейсмических данных, метрика Вассерштейна, обратная задача.

## APPLICATION OF THE WASSERSTEIN METRIC TO SOLVING THE INVERSE DYNAMIC SEISMIC PROBLEM

*Alexey V. Vasilenko*

Novosibirsk National Research State University, 1, Pirogova St., Novosibirsk, 630073, Russia, Student, e-mail: alexvas1996@ya.ru

The inverse dynamic problem of seismic consists in recovering the velocity model of elastic medium based on the observed seismic data. In this work it is proposed to use the Wasserstein metric since its use reduces the number of local extremes of the target functional in comparison with the  $L_2$ -norm.

This work also presents and discusses the results of numerical experiments including a comparative analysis of the velocity models recovered using the Wasserstein metric and  $L_2$ -norm.

**Key words:** seismic, seismic data processing, Wasserstein metric, inverse problem.

### *Введение*

Одним из самых перспективных методов извлечения количественной информации об упругих параметрах среды из сейсмических данных является обращение полного волнового поля (англ. full waveform inversion, FWI). Этот метод реализует один из возможных подходов к решению обратной динамической задачи сейсмики путём минимизации целевого функционала, характеризующего в некоторой норме отклонение смоделированных сейсмограмм от зарегистрированных. Обычно в качестве этого функционала выступает  $L_2$ -метрика, но в данной работе предлагается использовать так называемую метрику Вассерштейна и показать её преимущества.

## Определение метрики Вассерштейна

Пусть  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  – плотности вероятностных распределений. Будем говорить, что отображение  $T: X \rightarrow Y$  переводит распределение  $f$  в  $g$ , если для случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения  $f$ , выполняется условие:  $\xi \sim f \Rightarrow T(\xi) \sim g$ . Тогда метрика Вассерштейна между двумя распределениями определяется следующим образом:

$$W_2^2(f, g) = \inf_{T \in \mathcal{M}} \int_X |x - T(x)|^2 f(x) dx. \quad (1)$$

Здесь  $\mathcal{M}$  – множество всех отображений, переводящих распределение  $f$  в  $g$ .

Рассмотрим одномерный случай. Пусть  $X = Y = [a, b]$ . Тогда функции распределения, соответствующие плотностям, имеют следующий вид:

$$F(s) = \int_a^s f(x) dx, \quad G(s) = \int_a^s g(x) dx.$$

Утверждается [2], что отображение  $T^*(x) = (G^{-1} \circ F)(x)$  доставляет минимум выражению (1). Следовательно, справедлива следующая запись:

$$W_2^2(f, g) = \int_a^b |t - G^{-1}(F(t))|^2 f(t) dt. \quad (2)$$

Для произвольных функций  $f$  и  $g$  введем обозначения:

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}, \quad \langle f \rangle = \int_X f(x) dx.$$

Тогда, применяя разную нормализацию, отклонение одной функции от другой можно определить различными способами:

$$\rho_1(f, g) = W_2^2\left(\frac{f^+}{\langle f^+ \rangle}, \frac{g^+}{\langle g^+ \rangle}\right) + W_2^2\left(\frac{f^-}{\langle f^- \rangle}, \frac{g^-}{\langle g^- \rangle}\right) \quad (3)$$

$$\rho_2(f, g) = W_2^2\left(\frac{f^2}{\langle f^2 \rangle}, \frac{g^2}{\langle g^2 \rangle}\right) \quad (4)$$

$$\rho_3(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|^2 dx. \quad (5)$$

Одним из наиболее важных свойств данной метрики является увеличение области притяжения глобального минимума. Это достигается главным образом за счет выпуклости. Приведем теоремы без доказательства.

Теорема 1 (Выпуклость относительно сдвига). Пусть  $f, g$  – плотности распределений с ограниченным вторым моментом и  $T$  – оптимальное преобразование  $f$  в  $g$ . Если  $f_s(x) = f(x - s\eta) \forall \eta \in \mathbb{R}^n$ , то оптимальное преобразование  $f_s(x)$  в  $g(y)$  есть  $T_s(x) = T(x - s\eta)$ . Кроме того,  $W_2^2(f_s, g)$  является выпуклой функцией по  $s$ .

Теорема 2 (Выпуклость относительно растяжения). Пусть  $f$  – плотность распределения и  $g(y) = f(A^{-1}y)$ , где  $A$  – симметричная положительно определенная матрица. Тогда  $W_2^2(f, g / \langle g \rangle)$  является выпуклой функцией по отношению к собственным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$ .

### **Постановка обратной задачи с использованием метрики Вассерштейна**

Рассмотрим волновой процесс на отрезке  $[0, L]$ , описываемый следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(t)\delta(z - z_s), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \right)\Big|_{z=L} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c(z)$  – скорость распространения волны,  $z_s$  – координата источника,  $z_r$  – координата приемника,  $f(t)$  – функция, определяющая характер импульса в точке источника (в нашем случае будем использовать импульс Рикера с доминирующей частотой 25 Гц),  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака. Условие (7) на правом конце интервала соответствует отсутствию волн, приходящих из бесконечности.

Обозначим смоделированные данные как  $d_r(t; c) = u(t; z_r, c)$ , а зарегистрированные данные –  $d_r^{obs}(t) = u(t; z_r, c^*)$ . Целью задачи является восстановление скоростной модели среды  $c^*(z)$  по зарегистрированным данным. Далее, для удобства, будем опускать переменную времени. В результате получаем следующую оптимизационную задачу:

$$\sum_r \rho(d_r^{obs}, d_r(c)) \rightarrow \min_c. \quad (8)$$

В качестве функционала  $\rho$  будем рассматривать метрики (3)-(5). Метрику (3) также будем называть метрикой Вассерштейна с разделенными данными (Wasserstein metric with separated data), метрику (4) – метрикой Вассерштейна с данными, возведенными в квадрат (Wasserstein metric with squared data).

### Численные эксперименты

Рассмотрим отрезок  $[0, L]$ , где  $L = 2000$  м. Источник и приемник возьмем около левой границы, в пятом и во втором узлах, соответственно. В наших экспериментах будем использовать некоторую эталонную скоростную модель и найдем по ней «зарегистрированные» данные. Далее будем менять модель разными способами (рис. 1) и анализировать поведение трёх рассматриваемых метрик.

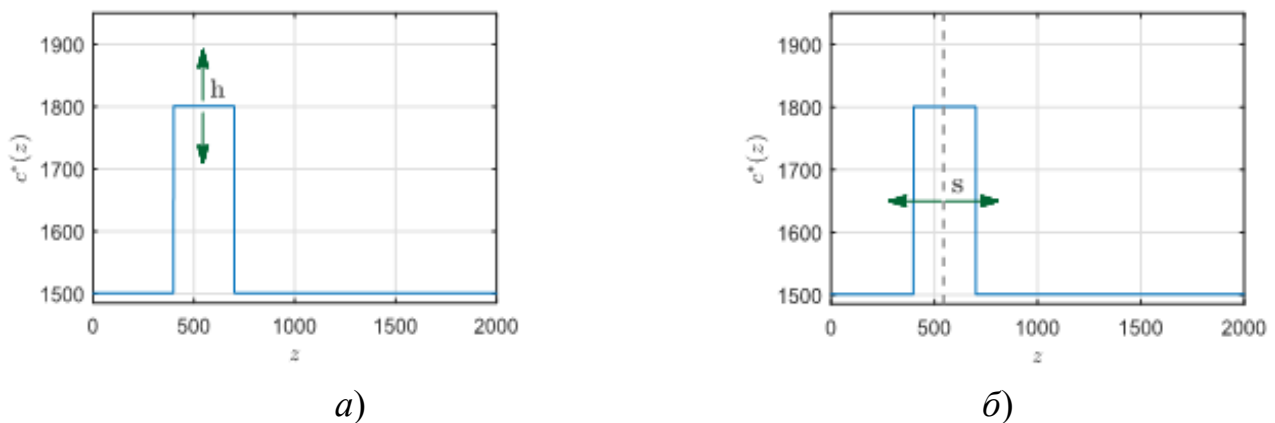


Рис. 1. Изменение величины разрыва (а) и положения выступа (б)

Начнём с изучения функционала  $\sum_r \rho(d_r^{obs}, d_r(c_p))$  при изменении параметров  $p \in \{h, s\}$ , которые характеризуют величину разрыва и положение выступа.

Результаты для первого случая можно наблюдать на рис. 2. Как видно, выгодным отличием метрики Вассерштейна по сравнению с  $L_2$ -нормой является отсутствие локальных минимумов.

Рассмотрим следующий случай (рис. 3). Здесь также видно, что метрика Вассерштейна вновь имеет более подходящее поведение для решения обратной задачи. Но здесь можно наблюдать некоторые небольшие скачки, то есть в этом случае условие выпуклости выполняется не в полной мере. Экспериментальным путем была определена природа этих скачков – они связаны с отражением волны от левой границы  $z = 0$ . Если поставить на левой границе аналогичные условия прохождения, то наблюдаемых скачков не будет.

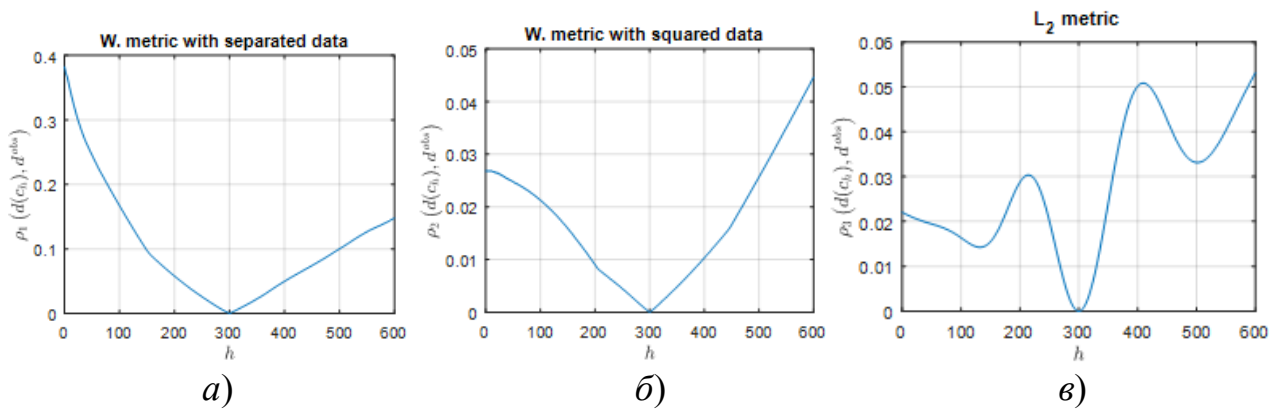


Рис. 2. Значения целевого функционала для метрик (3)-(5) в зависимости от величины разрыва  $h$

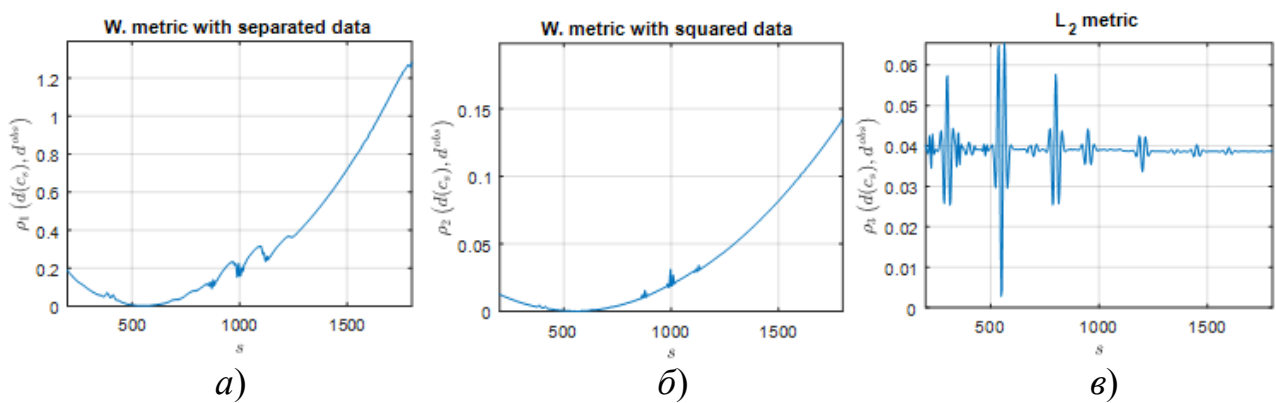


Рис. 3. Значения целевого функционала для метрик (3)-(5) в зависимости от положения выступа  $ss$

### ***Восстановление параметров скоростной модели с помощью метода Нелдера-Мида***

В качестве эталонной скоростной модели возьмем модель с двумя разрывами (рис. 4). Таким образом, модель будет иметь четыре параметра: две координаты разрыва  $s_i$  и две величины разрыва  $h_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Величину скорости в начале координат возьмем равной 1500 м/с.

Параметр	Значение
$s_1$ , М	700
$h_1$ , м/с	300
$s_2$ , М	1250
$h_2$ , м/с	150

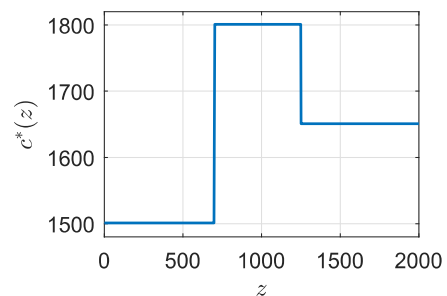


Рис. 4. Параметры реальной модели

Поскольку модель имеет четыре параметра, для данного метода нужно выбрать пять начальных приближений.

Таблица 1

Начальные приближения

Параметр / № приближения	1	2	3	4	5
$s_1$ , м	660	780	800	732	679
$h_1$ , м/с	270	317	252	243	342
$s_2$ , м	1135	1341	1427	1100	1413
$h_2$ , м/с	95	163	115	191	89

После окончания итерационного процесса получили результаты, показанные в табл. 2. Более наглядно результаты видны на рис. 5. Отсюда можно сделать вывод о том, что наиболее точное решение получается с применением метрики Вассерштейна.

Таблица 2

Результаты итерационного процесса метода Нелдера-Мида

Параметр / метрика	W. metric with separated data	W. metric with squared data	$L_2$ -metric
$s_1$ , м	715.749081	688.623804	1045.714285
$h_1$ , м/с	291.907290	285.801213	163.802086
$s_2$ , м	1205.543747	1234.270371	1157.086881
$h_2$ , м/с	157.563816	136.313610	250.174247

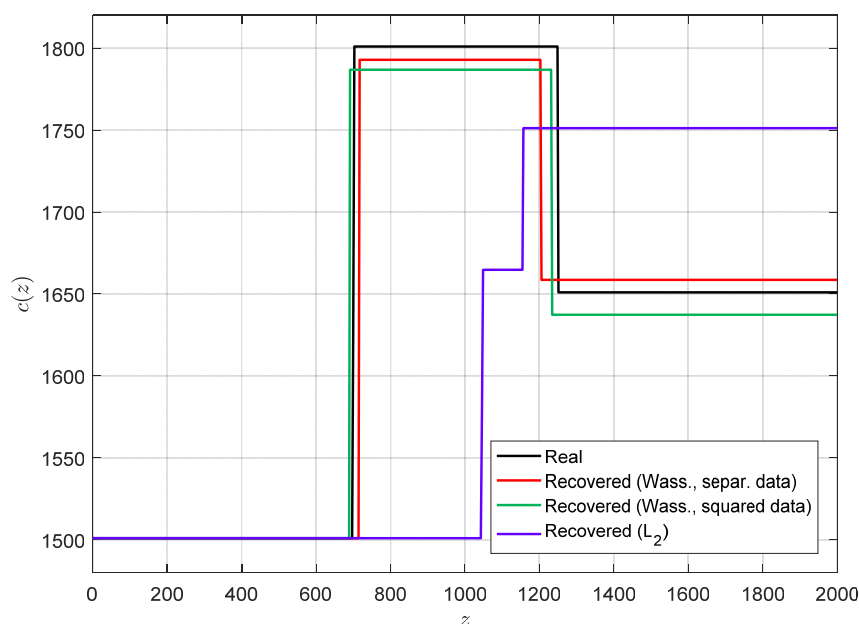


Рис. 5. Результаты итерационного процесса метода Нелдера-Мида

## *Заключение*

В работе было рассмотрено применение метрики Вассерштейна к восстановлению параметров скоростной модели. Как было показано, данная метрика обладает значительными преимуществами по сравнению с обычной  $L_2$ -метрикой, самым важным из которых является увеличение области притяжения глобального минимума, что позволяет более точно определить искомые параметры.

*Данная работа выполнена при поддержке РФФ, проект №17-17-01128.*

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Engquist B., Froese B., Yang Y. Optimal Transport for Seismic Full Waveform Inversion // arXiv:1602.01540 [physics.geo-ph] 4 Feb 2016.
2. Villani C. Topics in optimal transportation. – Providence, RI. – 2003. – Vol. 58 of Graduate Studies in Mathematics. – P. 370.
3. Application of optimal transport and the quadratic Wasserstein metric to full-waveform inversion / Y. Yang, B. Engquist, J. Sun, B. Hamfeldt // Geophysics. – 2018. – Vol. 83. – P. R43–R62.
4. The quadratic Wasserstein metric for earthquake location / J. Chen, Y. Chen, H. Wu, D. Yang // arXiv:1710.10447 [math.NA] 28 Oct 2017.
5. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // Geophysics. – 1986. – Vol. 51. – P. 889–901.

© А. А. Василенко, 2019