УДК 517.968, 528.8
DOI: 10.33764/2618-981X-2019-1-2-97-101

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ НА ЛОМАНЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ОБЪЕКТА

Акбар Хасанович Бегматов
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, тел. (383)343-25-77, e-mail: begah@ngs.ru

В работе рассматриваются задачи восстановления функции по известным интегралам от нее с заданной весовой функцией на ломаных в полосе и соответствующие интегральные уравнения первого рода типа Вольтерра. Изучены вопросы единственности и устойчивости решения рассмотренных задач, получена формула обращения. Исследуются проблемы численного решения рассмотренных задач.

Ключевые слова: обратная задача, задачи интегральной геометрии, интегральные уравнения Вольтерра, уравнения первого рода, некорректные задачи, численное решение.

RECOVERY OF A FUNCTION FROM INTEGRAL DATA ON BROKEN LINES AND SPATIAL STRUCTURE OF AN OBJECT

Akbar H. Begmatov
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, D. Sc., Professor, Department of Higher Mathematics, phone: (383)343-25-77, e-mail: begah@ngs.ru

We consider problems of function recovery from its given integrals with known weight function over broken lines in a strip and connected first kind integral equations of Volterra type. Uniqueness and stability questions for considered problems are studied, inversion formula is obtained. Problems of numerical solution of the considered problems are investigated.

Key words: inverse problem, integral geometry problems, Volterra integral equations, first kind equations, ill-posed problem, numerical solution.

Введение

Изучается задача определения функции, если всюду в полосе известны интегралы от этой функции с заданной весовой функцией по ломаным, которые однозначно параметризуются при помощи координат своих вершин [1, 2]. Эта обратная задача связана с задачей определения важнейших параметров среды или объекта по наблюдаемым интегральным данным этих параметров ([3, 4]).

С математической точки зрения задача сводится к исследованию решения специального интегрального уравнения Вольтерра первого рода [5]. Эта задача является некорректно поставленной. Отметим, что в виде табличных данных с погрешностью может быть задана не только правая часть уравнения, но и ядро интегрального оператора, что также влечет за собой существенные трудности исследования.

В работе изучаются вопросы единственности и устойчивости решения математической модели задачи. Предлагается метод ее приближенного решения. Показано, что такой метод может послужить основой нового конструктивного метода построения регуляризирующего алгоритма для данной задачи.

Постановка задачи

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$(x,y)\in R^2,\quad (\xi,\eta)\in R^2,\quad \lambda\in R^1,\quad \mu\in R^1,$$

$$L_H=\left\{(x,y):\ x\in R^1,\ y\in[0,H],\ H<\infty\right\}.$$

В полосе L_H рассмотрим семейства ломаных, которые определяются соотношениями

$$\Gamma(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=y-\eta,\ 0\le y\le H\right\}.$$

Сформулируем математическую модель задачи восстановления структуры среды в полосе по ее интегральным характеристикам на ломаных: *восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если в полосе L_H известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Gamma(x,y)\}$ с весовой функции $g(x,y)$:*

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,\xi)u(x,y)d\xi=f(x,y). \tag{1}$$

Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$, весовая функция имеет экспоненциальный вид.

Тогда решение уравнения (1) в классе $C_0^2(L_H)$ единственно и имеют место оценки его устойчивости

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{0,1}}\le C_1\|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}}, \tag{2}$$

здесь C_1 – некоторая константа.

Интегральные преобразования и оценки устойчивости

Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_0^y\left[u(x-h,\eta)+u(x+h,\eta)\right]e^{-(y-\eta)}d\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}f(x,y), \tag{3}$$

где $h=y-\eta$.

Применим к обеим частям уравнения (3) преобразование Фурье по первой переменной x:

$$\hat{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int_{0}^{y} \left[u(x-h,\eta) + u(x+h,\eta) \right] e^{-(y-\eta)} d\eta dx .$$

Получим уравнение

$$\int_{0}^{y} \hat{u}(\lambda,\eta) \cos(\lambda(y-\eta)) e^{-(y-\eta)} d\eta = \hat{\varphi}(\lambda, y), \tag{4}$$

где $\hat{\varphi}(\lambda, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{f}(\lambda, y)$.

Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа по переменной y:

$$\tilde{\hat{\varphi}}(\lambda, p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-py} \int_{0}^{y} \hat{u}(\lambda,\eta) \cos(\lambda(y-\eta)) e^{-(y-\eta)} d\eta dy, \tag{5}$$

Таким образом, из уравнения (5) получаем:

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) \cdot I(\lambda, p) = \tilde{\hat{\varphi}}(\lambda, p), \tag{6}$$

где $\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \int_{0}^{\infty} e^{-p\eta} \hat{u}(\lambda,\eta) d\eta$, $\tilde{\hat{\varphi}}(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{\varphi}(\lambda, y) dy$.

Из формулы (6), обращая интегральные преобразования Фурье – Лапласа, можно получить формулу обращения и оценку устойчивости (2).

Численный эксперимент

Для получения достаточно хорошего приближенного решения рассматриваемых задач требуется регуляризация. Отметим, что методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода, не нарушающие их вольтерровость, позволяют, как правило, создать не менее надежные и существенно более быстрые алгоритмы обращения, чем классический метод регуляризация по Тихонову.

В работе получен дискретный аналог интегрального уравнения (1) с учетом табличных данных. Затем исследуется обратная задача устойчивого решения (1). Вводится равномерная сетка в прямоугольной области $D = [a,b] \times [c,d]$. Отыскиваем приближенные решения задачи на этом прямоугольнике. Способ решения основан на применении метода конечно-разностных схем для численного дифференцирования в частных производных.

Результаты вычислительного эксперимента для тестовой функции полиномиального вида проиллюстрированы ниже (рис. 1, 2).

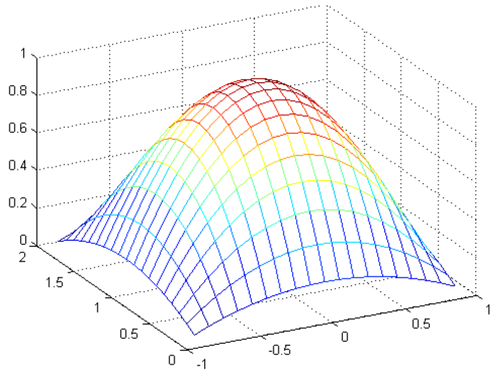

Рис. 1. Точное решение

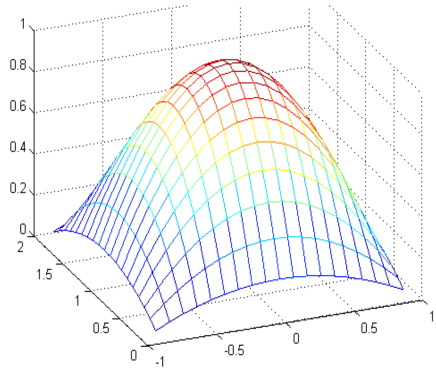

Рис. 2. Приближенное решение

Заключение

В работе рассматривается математическая модель задачи восстановления структуры объекта по интегральным характеристикам основных параметров. Восстановление производится по наблюдаемым данным вне данного объекта.

С математической точки зрения задача представляет собой задачу обращения интегрального оператора с известной весовой функцией, заданного на линейных многообразиях. Изучаются соответствующие интегральные уравнения Вольтерра первого рода. Получена явная формула обращения и оценки устойчивости, использующие производные не выше второго порядка от данных задачи.

Проведен численный эксперимент, результаты которого показывают хорошее совпадение с аналитической формулой обращения. Таким образом, в работе получены теоретические основы разработки эффективного алгоритма численного решения обратной задачи (1).

Рассмотренная в работе модель и полученные результаты по алгоритму ее аналитического и численного решения могут быть использованы в задачах геоинформационной обработки пространственных данных при математическом моделировании земной поверхности, а также объектов на этой поверхности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Begmatov A. H. Inversion of X-ray Transforms with Incomplete Data in n-Dimensional Space // International forum on strategic technology, IFOST 2016, Novosibirsk, Russia, 1–3 June 2016: Conference proceedings. Part 3. – Novosibirsk, 2016. – P. 99–101.

2. Begmatov A. H., Djaykov G. M. Numerical Recovery of Function in a Strip from Given Integral Data on Linear Manifolds // International forum on strategic technology, IFOST 2016, Novosibirsk, Russia, 1–3 June 2016: Conference proceedings. Part 1. – Novosibirsk, 2016. – P. 478–483.

3. Natterer F. and Wubbeling F. Mathematical Methods in Image Reconstruction. SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

4. Begmatov Akbar H. Volterra-type integral geometry problems // Integral methods in science and engineering, B. Bertram, C. Constanda and A. Struthers, Eds., Research Notes in Mathematics Series, 418. – Chapman&Hall/CRC, Boka Raton, Fl, 2000. – P. 46–50.

5. Бегматов А. Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости// Доклады Академии наук. – 2009. – № 4 (427). – С. 439–441.